

Revista Ejes



Facultad de Ciencias de la Educación
Licenciatura en Matemáticas
Número 1 - 2013. Ibagué - Tolima - Colombia
ISSN: 2357-3724

Revista Ejes

Facultad de Ciencias de la Educación
Licenciatura en Matemáticas
Número 1 - 2013. Ibagué - Tolima – Colombia
ISSN: 2357-3724

JOSÉ HERMAN MUÑOZ ÑUNGO

Rector

DAVID BENÍTEZ MOJICA

Vicerrector Académico

ANDRÉS FELIPE VELÁSQUEZ MOSQUERA

Decano Facultad de Ciencias de la Educación

MIGUEL EDUARDO HUERTAS MENESES

Director de Unidad Académica

ISSN: 2357-3724

Director-Editor

Ovimer Gutiérrez Jiménez

Coordinadora Editorial

Marta Faride Estefan Upegui

Comité Editorial:

Rosemberg Peralta Vargas

Sergio Adrián García Cruz

Julián Andrés Rodríguez Vargas

Diego Ricardo Rojas Cuéllar

Colaboraron:

Lyda Constanza Mora Mendieta

Coordinadora Licenciatura en Matemáticas

Departamento de Matemáticas

Universidad Pedagógica Nacional

Maribel Patricia Anacona

Directora Licenciatura en Educación

Básica con énfasis en Matemáticas

Universidad del Valle

Carátula:

Colors Editores

http://1.bp.blogspot.com/_T6eCra7u-hE/RvptnGWkCmI/AAAAAAAAUA/k4fu0uHxUKI/s320/wwwbienvenidosorg.jpg
14815093-3d-cabeza-humana-y-o-cremallera-abierta-concepto-de-inteligencia

Diseño y Diagramación: Colors Editores

Periodicidad: Anual

Tiraje: 500 ejemplares

Las opiniones contenidas en los artículos de esta revista no comprometen al programa de Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Educación, de la Universidad del Tolima, sino que son responsabilidad de los Autores, dentro de los principios democráticos de cátedra libre y libertad de expresión. Se autoriza la reproducción total o parcial de los artículos citando la fuente y el autor, estrictamente para fines académicos. Para comunicarse con la revista dirijase al correo electrónico: ejes@ut.edu.co

Contenido

Editorial	8
<i>Andrés Felipe Velásquez Mosquera</i> <i>Decano de la Facultad de Ciencias de la Educación</i>	
Presentación	9
<i>Ovímer Gutiérrez Jiménez</i> <i>Director de programa Licenciatura en Matemáticas</i>	
La Etnomatemática: un campo fértil para la investigación	10
<i>Carlos Andrés Rojas Prada</i> <i>Universidad del Tolima</i>	
Pacicultura y Pensamiento Matemático: componentes que aproximan el modelo pedagógico Paciculturas y la educación matemática	14
<i>Juan Gabriel Rodríguez Ramírez</i> <i>Universidad del Tolima</i>	
¿Memorizar las tablas de multiplicar garantiza el aprendizaje y la comprensión en los niños?	18
<i>Rafael Antonio Reina Ortiz</i> <i>Katherine Viviana Ramírez</i> <i>Universidad del Tolima</i>	
Diversidad de situaciones para el estímulo del pensamiento matemático	22
<i>Miguel Ernesto Villarraga Rico</i> <i>Universidad del Tolima</i>	
La historia de los números y los sistemas numéricos en diferentes bases	34
<i>Miguel Ángel Torres Rincón</i> <i>Nicolás Torres Rincón</i> <i>Asesoría: Esperanza Lovera de R.</i> <i>Universidad Pedagógica Nacional</i>	
Explorando el mundo de los números n-males	36
<i>Jhon Alexander Gómez Aponte</i> <i>María Inés Cano Villamil</i> <i>Esperanza Lovera de Rincón</i> <i>Universidad Pedagógica Nacional</i>	
El trabajo experimental asistido por recursos informáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Física	39
<i>Carlos Enrique Sifredo Barrios</i> <i>Ministerio de Educación de Cuba</i> <i>Livan Ayala Espinosa</i> <i>Universidad de Ciencias Pedagógicas "Rubén Martínez Villena", Cuba</i>	

Las representaciones estadísticas en el contexto escolar	51
<i>Rubén Darío Corrales Velasco</i>	
<i>Yenny Cifuentes Bocanegra</i>	
<i>Jenny María Ortiz Cáceres</i>	
<i>Universidad del Valle</i>	
Comensalismo educativo “Formación y Ética”	55
<i>Freddy Arley Ibarra Becerra</i>	
<i>Universidad del Tolima</i>	
Construyendo mi entorno. Arquitectura con sketchup una forma de enseñar Geometría	58
<i>Edgar Alexander Rodríguez Guzmán</i>	
<i>Universidad del Tolima</i>	
El Uso de las TIC (Software Libre) para la enseñanza de las Matemáticas	61
<i>Derly Janeth Forero Hernández</i>	
<i>Universidad del Tolima</i>	
Aprendiendo Winplot para la exploración de la ecuación logística	64
<i>Yury Alejandra Espinosa Flórez</i>	
<i>Jhon Fredy Saavedra Delgado</i>	
<i>Universidad del Tolima</i>	
Aprendizaje de la solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales 2x2 (Método Gráfico), en Grado Noveno, utilizando el graficador Winplot	71
<i>Mariana Cogua Cubides</i>	
<i>Universidad del Tolima</i>	
Los anillos digitales	73
<i>Jorge E. Mendoza Guzmán</i>	
<i>Universidad del Valle</i>	
Números Primos Cubanos	76
<i>Diana Isabel Quintero Suica</i>	
<i>Ingrith Yadira Álvarez Alfonso</i>	
<i>Universidad Pedagógica Nacional</i>	
La Bruja de Agnesi	79
<i>Samuel Alberto Cristancho Rincón</i>	
<i>Sileni Marcela Carranza Cantor</i>	
<i>Universidad Pedagógica Nacional</i>	
Intervalos de confianza con estudiantes universitarios	81
<i>Diana Isabel Quintero Suica</i>	
<i>Yineth Paola Sáenz Neira</i>	
<i>Universidad Pedagógica Nacional</i>	

La Criba de la Parábola	83
<i>Britany Johana Salazar Salazar</i>	
<i>Diana Isabel Quintero Suica</i>	
<i>Universidad Pedagógica Nacional</i>	
Experiencia significativa	85
<i>María Neila Guzmán Guzmán</i>	
<i>Universidad Católica del Norte</i>	
<i>Institución Educativa Minuto de Dios Fe y Alegría sede Padilla, Lérída</i>	
Entrevista al estudiante Lisandro	87
El Cuento de la Cripta (Cuento)	89
<i>Lisandro Mendoza Guzmán</i>	
<i>Institución Educativa Minuto de Dios Fe y Alegría sede Padilla, Lérída</i>	
Acerca de la enseñanza	90
<i>Leidy Yhovana Orozco Vique</i>	
<i>Universidad del Magdalena</i>	
La Geometría sin espacio dentro del aula de clase	92
<i>José Jair Sáez</i>	
<i>Jaiver Alberto Muñoz Barbosa</i>	
<i>Universidad del Tolima</i>	

Editorial

La formación integral, la búsqueda, la producción, la sistematización y la divulgación del conocimiento científico, tecnológico artístico y humano; y el compromiso con el medio ambiente son los pilares misionales de la Universidad del Tolima, que su Facultad de Ciencias de la Educación promueve a través del proyecto editorial que hoy presenta. En la actualidad los proyectos editoriales son una prioridad, como lo afirma el profesor Fabio Jurado Valencia, del Departamento de Literatura de la Universidad Nacional de Colombia “se ha iniciado el despegue de la tradición escrita y se siente un entusiasmo enorme hacia la lectura”. Por esta razón, se hace indispensable que en el ámbito universitario transite el libro de primera fuente, como lo es en este caso la revista de cada Licenciatura de la Facultad.

Este proyecto editorial pretende ser un espacio de divulgación formal de la Facultad de Ciencias de la Educación; donde los programas que la conforman, presentan a la comunidad académica sus avances, logros, fortalezas e intereses; reflexiones y productos escriturales de procesos pedagógicos y didácticos en el marco de las asignaturas, a través de una revista propia. En cada una de ellas los estudiantes, los profesores, los graduados e invitados serán los enunciadores, quienes por medio de la escritura crean un puente de comunicación con programas afines dentro y fuera de Colombia. De esta forma la Universidad del Tolima abre otros espacios para el diálogo de saberes y la argumentación razonada, sobre temas que suscitan la reflexión desde diversas perspectivas.

EJES de la Licenciatura en Matemáticas, **LICIENSO UT** de la Licenciatura en Ciencias Sociales, **BREAKING BOUNDARIES** de la Licenciatura en Inglés, **CULTURA DEL MOVIMIENTO** de la Licenciatura en Educación Física, Deportes y Recreación, **DO-CIENCIA** de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Ciencias Naturales y Educación Ambiental, **APUNTACIONES** de la Licenciatura en Lengua Castellana son las revistas que constituyen este proyecto editorial, cuyo trasfondo es contribuir a la formación del ciudadano que aporte a la configuración de nuestra facultad en procura de una Colombia mejor.

Andrés Felipe Velásquez Mosquera
Decano
Facultad de Ciencias de la Educación

Presentación

*“Mientras los hombres sean libres para preguntar lo que deben;
libres para decir lo que piensan;
libres para pensar lo que quieran;
la libertad nunca se perderá y la ciencia nunca retrocederá.”*
Robert Oppenheimer (1904-1967)

Para el programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima, es un honor presentar a la comunidad académica el primer número de la revista **EJES**. En esta revista se publicarán artículos sobre la Educación Matemática, la didáctica, la pedagogía, la investigación, las prácticas pedagógicas, el proceso de la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas escolares, reflexiones sobre educación, las relaciones entre escuela, estudiante y profesor, entre otros elementos, que contribuyan a potencializar la aprehensión de conceptos matemáticos, dentro y fuera del aula.

La revista **EJES** se concibe como un espacio académico y de reflexión donde investigadores, profesores, graduados y estudiantes de nuestro programa y de otros con la misma denominación y afines puedan publicar y dar a conocer sus investigaciones, sus escritos, sus reflexiones, sus aportes a la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, que propendan a contribuir a mejorar las prácticas pedagógicas y el quehacer docente.

Es así, como esta primera publicación cuenta con la participación de la comunidad educativa interesada en la Educación Matemática como es el programa de Licenciatura en Matemáticas de nuestra Alma Mater, de universidades nacionales e internacionales como la Universidad Pedagógica Nacional, Universidad del Valle, Universidad Católica del Norte, Universidad del Magdalena, Universidad de Ciencias Pedagógicas “Rubén Martínez Villena” de Cuba, al igual que el representante del Ministerio de Educación de Cuba el doctor Carlos Enrique Sifredo Barrios y de nuestra valiosa universidad, la Universidad del Tolima.

Es grato contar con la participación de quienes compartieron sus ideas y dejaron sus escritos para la comunidad académica y para quienes sea de su interés. Es la oportunidad para invitar a quienes deseen compartir sus investigaciones, escritos y/o reflexiones en los próximos números de nuestra revista **EJES**, la revista del programa Licenciatura en Matemáticas.

Es así, como nuestro programa tiene una importante responsabilidad y un gran compromiso, puesto que es relevante que esta revista **EJES**, de circulación anual, se perpetúe y evolucione en el transcurrir de los tiempos, proporcionando un espacio para la comunidad interesada en la formación de profesores en Educación Matemática.

Ovímer Gutiérrez Jiménez
Director de Programa
Licenciatura en Matemáticas

La Etnomatemática: un campo fértil para la investigación



Disco de oro. Pipiales (col). 1100-1300 d.d.J.C

Carlos Andrés Rojas Prada¹

Resumen. El estudio de los conocimientos matemáticos de las culturas indígenas en Colombia ha comenzado a ser un tema relevante dentro de la investigación educativa; sin embargo, aún no es fácil encontrar una bibliografía extensa sobre el tema. El presente artículo tiene como propósito reseñar algunas investigaciones relacionadas con la Etnomatemática así como también, caracterizar las maneras más frecuentes de abordar dichos estudios; además se quiere resaltar la importancia de estos trabajos como una forma de rescatar parte de la identidad cultural de nuestro país.

Palabras clave. Educación matemática, Etnomatemática, matemática indígena, herencia cultural.

La investigación sobre los conocimientos matemáticos de las culturas indígenas está enmarcada dentro de lo que se conoce como Etnomatemática; el término hace referencia a las Matemáticas que practican o practicaron tribus nacionales, grupos laborales o personas de cierta edad, entre otros (D'Ambrosio, citado por Blanco, 2006). De manera que para su construcción se tienen en cuenta elementos socioculturales como matemáticos.

En el presente documento se hará uso del término Etnomatemática para referirse únicamente a los conocimientos matemáticos de las culturas indígenas y comunidades de artesanos. En

Colombia las investigaciones sobre este tema se vienen adelantando desde la década de los 80 por profesores como: Víctor Albis y Guillermo Páramo, entre otros. (Blanco, 2006). Estos profesores son considerados como los pioneros sobre esta materia en Colombia.

Los estudios en este campo pueden caracterizarse, según Blanco (2006), en cuatro categorías a saber:

1. Análisis del pensamiento matemático de comunidades indígenas y afrodescendientes ancestrales.
2. Utilización de instrumentos autóctonos de las comunidades indígenas o negras como herramientas pedagógicas para la enseñanza de la matemática occidental.
3. Estudios sociales, históricos, antropológicos, etc., de formas de pensamiento matemático y científico en civilizaciones y comunidades.
4. Estudios históricos, epistemológicos, filosóficos, educativos, sobre formación de culturas matemáticas y científicas en Colombia.

En la primera categoría se encuentran trabajos como el del profesor Víctor Albis (1986) titulado: *las proporciones del sol de los pastos*, el cual tiene por objeto analizar el motivo prehispánico llamado *sol*

¹ Licenciado en Matemáticas y Especialista en Pedagogía de la Universidad del Tolima-Colombia, Docente de Educación Básica y Media en el departamento del Tolima. carlomagno9@gmail.com

de los pastos que aparece con cierta frecuencia en la decoración de petroglifos y cerámicas de las etnias Pasto y Quillasinga. El estudio pretende reconstruir parte del pensamiento geométrico de estas etnias, así como también reafirmar su identidad cultural. El trabajo concluye que estos diseños son generados por reflexiones en el plano los cuales se relacionan con la teoría de grupos. Es interesante resaltar que en este estudio se involucran matemáticas avanzadas para describir dichas simetrías.

Otro trabajo del profesor Albis en esta línea tiene por título: *Arte y geometría precolombina*. El estudio fue publicado en el año de 1984 en la Revista *Latinoamericana de la Historia de las Ciencias y la Tecnología*. Esta obra tiene por objeto mostrar la matemática subyacente en la ornamentación de algunas culturas de Colombia. El estudio concluye que los diseños geométricos encontrados en estas artesanías se pueden asociar con los grupos generados por **reflexiones** en el plano. Por otra, se presenta la posibilidad de que en secundaria y en la educación superior, se enseñen los temas de **reflexión, simetría y traslación** utilizando el arte prehispánico. Además, el profesor Albis afirma en este documento que la inclusión de estos elementos en la enseñanza es una oportunidad para “alimentar nuestra identidad cultural, incorporando a la historia de la matemática la contribución de nuestros ancestrales ceramistas, orfebres, etc.” (Albis, 1984, p.33). Al final del trabajo se presenta una propuesta para un curso de antropología guiado por el arte prehispánico.

En la segunda categoría se encuentran trabajos tales como: *Etnomatemática: una alternativa pedagógica por explorar*, de los profesores Jaime Barboza y Mario Hernández (2000). El trabajo es una propuesta para utilizar los diseños decorativos presentes en la cestería de algunas comunidades del Vaupés como herramienta para la enseñanza del concepto de **función** en estudiantes de secundaria.

Otro trabajo en esta categoría es la tesis de pregrado de las estudiantes Derly Vargas y Luz Ortiz (2009), la cual se titula: *Etnografía en torno al concepto de figura geométrica en la cultura arhuaca*. El trabajo utiliza el método etnográfico con el fin de realizar un aporte a la enseñanza de la **geometría** a partir de los conocimientos de la cultura Arhuaca. En particular,

se toman como referentes la arquitectura y el tejido de mochilas. Es interesante la indagación que las investigadores hacen sobre los conocimientos y las prácticas pedagógicas de los docentes que enseñan en la comunidad Ika, llegando a la conclusión de que estos profesionales de la educación muy ocasionalmente involucran los conocimientos de la comunidad como un instrumento en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Otra investigación para resaltar en esta categoría es la tesis de maestría del docente Armando Aroca (2007) titulada: *Una propuesta de enseñanza de geometría desde una perspectiva cultural*. Este estudio de caso tiene como objetivo general construir una propuesta de enseñanza de la geometría para los indígenas arhuacos de la comunidad Ika de la Sierra Nevada de Santa Marta, teniendo como referencia las matemáticas que subyacen en la elaboración de mochilas en esta comunidad. Se espera que el trabajo ayude a consolidar la investigación en Etnomatemática a la vez que motive a los estudiantes de pregrado y posgrado en matemáticas a iniciar trabajos de investigación en el campo de la Etnomatemática.

Por otra parte, en la tercera categoría se ubican estudios como el realizado por Evidalia Molina y Luis Ángel Díaz (1998), titulado: *Los numerales de la familia lingüística macrochibcha*. El trabajo busca identificar mediante el estudio de las palabras numerales y los métodos de cuenta, la existencia de corrientes culturales que en algún momento se separaron de la familia lingüística de los chibchas.

Otra investigación que se puede clasificar en esta categoría es la presentada por Christian Camilo Fuentes (2011) de la Universidad Distrital de Bogotá titulada: *Identificación de Algunas Actividades Matemáticas Universales en el Proceso de Creación de Cestería de un Grupo de Artesanos en el Municipio de Guacamayas, Boyacá, Colombia, Un Estudio de Caso*. Este estudio tiene como objeto precisar cuáles actividades matemáticas están presentes en la elaboración de la cestería de esta comunidad en relación con el **pensamiento métrico y espacial**. El estudio también pretende conocer cómo esta comunidad transmite sus conocimientos sobre la elaboración de cestería en espacios no escolares. El trabajo revela la inclusión de algunas nociones

de proporcionalidad directa, sistemas de media, simetría, rotaciones y traslaciones entre otros, en la elaboración de las artesanías.

Por último el profesor Hilbert Blanco (2005) hace un estudio correspondiente a la cuarta categoría titulado: *La Etnomatemática en Colombia*, en el cual se presenta un estado del arte de los trabajos sobre el tema en Colombia. También el estudio pretende relacionar la Etnomatemática con la educación matemática. Posteriormente se presentan los diferentes grupos de investigación que en la actualidad estudian el tema. Es de aclarar que en este estudio el término no se restringe únicamente a los conocimientos matemáticos de las culturas indígenas sino que también se aplica a otros grupos, como los adultos iletrados, grupos de niños con ciertas características, entre otros.

Consideraciones finales

Los trabajos sobre el tema han aumentado significativamente en los últimos años, lo que hace que la Etnomatemática se convierta en un campo fértil para la investigación en Colombia. Además, “son cada vez más los estudiantes de matemáticas y Licenciatura en Matemáticas y estudiantes de otras disciplinas interesados en la relación entre Etnomatemática y Educación Matemática” (Blanco, 2005, p.16). Sin embargo, todavía falta mucho camino por recorrer, dado que la mayoría de estos estudios no llegan a ser publicados, lo que dificulta el avance de la investigación en este campo del conocimiento.

Por otra parte, es fundamental que los docentes y futuros licenciados en matemáticas tengan conocimiento sobre el tema pues, como se puede apreciar, estos saberes resultan útiles en la enseñanza misma de las matemáticas. Al mismo tiempo, la Etnomatemática constituye una propuesta alternativa a la pedagogía tradicional en la enseñanza de las matemáticas haciendo que se involucren elementos culturales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia.

La Etnomatemática tiene como uno de sus objetivos principales documentar parte del acervo cultural de los pueblos indígenas. Lo anterior implica un

fortalecimiento de nuestra identidad pluricultural. Esto es muy importante pues se sabe que gran parte de los conocimientos de las culturas indígenas ha desaparecido y estudios de este tipo constituyen una manera de no perder lo que aún queda; además, su valor aumenta en un momento en que las tendencias globalizantes pretenden homogenizar el conocimiento y su manera de enseñarlo, ante esta realidad la Etnomatemática constituye una postura de resistencia frente a tal situación.

Sin embargo, algunos de los trabajos analizados no dejan de estar permeados por el paradigma de la matemática occidental, pues por ejemplo casi en todos los casos lo que se quiere es relacionar lo encontrado con la matemática tradicional (occidental). Esto hace que los hallazgos y resultados arrojados pierdan parte de su identidad como elementos de unas culturas fundamentadas en la mayoría de los casos en principios muy distantes a los de la matemática tradicional.

En general, los estudios sobre el tema tienen una marcada tendencia hacia el estudio de la geometría presente en la artesanía y orfebrería de las culturas indígenas. De donde se infiere que la presencia de elementos de geometría están presentes en un buen número de estas culturas. Por otra parte, es necesario resaltar que aparte de esta tendencia geométrica no parece ser común encontrar otro tipo de conocimientos matemáticos en estas culturas (tales como sistemas de numeración, elementos de álgebra, etc.), o bien no han sido estudiadas aún a profundidad. Lo anterior sugiere que todavía hay mucho por estudiar en el campo de la Etnomatemática.

Finalmente, el autor nota cierta tradición investigativa sobre Etnomatemática en las universidades Nacional de Colombia y del Valle. Esto llama la atención puesto que hay otras regiones del país donde la presencia indígena es más numerosa, pero sin embargo, no se han adelantado muchos estudios sobre el tema. Por consiguiente, se hace necesario expandir la investigación en Etnomatemática al resto del país para que así se continúe aportando en la consolidación de este valioso campo de investigación.

Referencias

- Albis, V. (1985). Arte prehispánico y Matemáticas. Revista de la Universidad Nacional de Colombia, 2 (7), 29-34.
- Albis, V. (1987). Las proporciones del sol de los pastos. Boletín de Matemáticas, Bogotá, 21(2-3), 110-134.
- Aroca, A. (2007). Una propuesta de enseñanza de geometría desde una perspectiva cultural. Tesis de maestría (Matemáticas)-Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Santiago de Cali.
- Barboza, J. J; Ramírez, M. H. (1999). Etnomatemática: una alternativa pedagógica por explorar. En: Tercer Foro de educación departamental y municipal del Vaupés, Vaupés
- Blanco, H. (2006). La Etnomatemática en Colombia. Un programa en construcción. (M. Borba, Ed.) Revista *BOLEMA*: Boletim de Educação Matemática, 19 (26), 49-75.
- Díaz, L. y Molina, E. (1988) Los numerales de la familia lingüística macrochibcha. Trabajo de Grado (Matemáticas) - Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- Fuentes, C. (2011). *Identificación y Análisis de las Prácticas Matemáticas de un Grupo de Artesanos y su Relación con la Educación Matemática: Planteamiento del Problema de Investigación*. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.
- Vargas, D. y Ortiz, L. (2009). Etnografía en torno al concepto de figura geométrica en la cultura arhuaca. Trabajo de grado (Matemáticas)-Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Pacicultura y pensamiento matemático: componentes que aproximan el modelo pedagógico Paciculturas y la Educación Matemática

Juan Gabriel Rodríguez Ramírez¹

Resumen. Acorde al Plan Decenal de Educación Nacional y el Auto 092 de la Corte Suprema de Justicia en favor de las mujeres en condición de desplazamiento en Colombia, se implementó el Bachillerato Pacicultor como un Modelo Educativo Flexible (MEF) que se constituye en un modelo más que avala y conceptúa el Ministerio de Educación Nacional (MEN). Este modelo es correspondiente al Modelo Pedagógico Paciculturas de la Corporación Observatorio para la Paz, creador del Bachillerato Pacicultor. En este se concibe la paz como pedagogía y desde allí todas las áreas enseñan, orientan y educan en aprendizajes de las áreas fundamentales. En el caso del área de las matemáticas el bachillerato pacicultor las orienta en forma holística, interdisciplinar y contextualizadas al entorno, los intereses, cuestionamientos y complejidades de sus estudiantes; en ellas el pensamiento matemático se edifica desde la educación matemática, y se logran espacios cotidianos en los que se aprende a conocer, a hacer, a ser persona y a vivir en comunidad.

Palabras clave. Pacicultura, pensamiento matemático, educación matemática, etnomatemática y Educación para la paz.

Pacicultura² y Pensamiento Matemático: componentes que aproximan el modelo pedagógico paciculturas y la educación matemática.

El Bachillerato Pacicultor es un modelo pedagógico, creado por la Corporación Observatorio para la Paz, que se enmarca en los Modelos Educativos Flexibles (MEF) del Ministerio de Educación Nacional (MEN), el cual surge tras la necesidad de presentar,

argumentar y desarrollar procesos educativos diferenciados y pertinentes con la población víctima de la violencia en Colombia. En la metodología, la paz se aprende y se aprende desde la paz. Luego de varios años de implementación se ha convertido en un MEF que reconoce el/la estudiante no como un/a agente pasivo/a en el proceso educativo, sino que le apuesta al cambio, al concebirlo como un sujeto social que posibilita sus propios aprendizajes; él y ella son razón primera y fundamental de lo que representan los intereses, los tiempos y los factores que inciden en sus aprendizajes. El Bachillerato Pacicultor es un MEF incluyente que genera ambientes de aprendizaje próximos a los contextos de los/as estudiantes, reconociendo a su familia, sus vecinos y las herramientas que ellos/as generen en sus prácticas de trabajo pedagógico, además es participativo porque vincula a los/as estudiantes en la toma de decisiones, potencia el logro de consensos y genera nuevas conjeturas³ que examinan la participación de todos y todas en las metas a corto, mediano y largo plazo.

De un lado, los procesos educativos en la Pacicultura son ante todo práctica pedagógica que se expresa en los procesos de identidad cultural y perciben la paz como camino y no como el fin último, por lo que los/as estudiantes interiorizan la pedagogía como nueva práctica cotidiana, así mismo que la conciben como constructora permanente de la conciencia del ser humano. Por otro lado, le apuesta a desaprender las preconcepciones absolutas, relativizando así los conflictos para desarticular violencias y lograr de este proceso una reflexión constante, generando así *inclusión social*⁴ y cultural. Del mismo modo la

¹ Licenciado en Matemáticas – Universidad del Tolima. Docente Fundación Universitaria Católica Lumen Gentium, Gestor Curricular Fundación Educativa Santa Isabel de Hungría. Santiago de Cali, Valle. jundes@gmail.com

² Vera Grave, Manuel Jiménez, Gonzalo Jiménez, Luis Alberto Torres, René Ramos, Carlos Jaime Fajardo y Catalina Herrera, Equipo asesor Bachillerato Pacicultor, Programa de Bachillerato Pacicultor Modelo Educativo, Bogotá (2010).

³ El término conjetura: juicio que se forma de las cosas o acaecimientos por indicios y observaciones (Diccionario Real Academia Española - DRAE), por lo que puede ser una afirmación presumida como cierta aun sin ser comprobada.

Pacicultura permite una introyección del cuidado de sí y este se expresa en la crítica y la autocrítica del quehacer de cada uno/a.

Parece imposible para algunas personas encontrar trabajos de sensibilización comunitaria y de participación democrática desde las matemáticas, pues se sostiene el imaginario que concibe este campo de estudio como un producto de la relación entre las matemáticas y los procesos de conocimiento puro y exacto, lo cual es una apreciación que estudiantes de escuelas tradicionales tienen sobre las matemáticas sin comprender que ésta maneja elementos diversos que la relacionan directamente con cada una de las prácticas comunes y cotidianas de cualquier grupo humano.

Precisamente las matemáticas tienen incidencia en todas las carreras profesionales y se permite por derecho propio ser una de las ciencias más incluyentes en el trabajo social y académico en la historia de la humanidad, la constante construcción de postulados y conjeturas permiten la afirmación teórica en muchos fenómenos; cuando hablamos de la construcción de teoría haremos la salvedad de situaciones y contextos en los cuales la matemática puede definir resultados exactos porque cuando se presenta un cambio en la relación de datos o incidencia de un fenómeno, es justamente donde ésta, asume el reto de la inclusión de nuevos hechos, factores y/o actores que determinan una lectura distinta y por lo tanto un discernimiento que cambia el razonamiento lógico del problema, relativizando dialécticamente todas las apreciaciones que configuran una nueva solución social y humana, consolidando prácticas encaminadas a la Cultura de Paz. En principio este cambio es el que permite que los conflictos, volviendo al tema de las conjeturas, así como los teoremas y los problemas matemáticos puedan ser generadores de prácticas incluyentes⁴. Así pues la disposición a la construcción de una nueva conjetura en la que todos los factores sean tenidos en cuenta, genera una de las primeras relaciones fuertes entre la Pacicultura y el Pensamiento Matemático, reconociendo otros actores que participan con sus propuestas, visiones

e intereses de nuevos consensos, acuerdos, metas y objetivos comunes.

Bueno, pero ¿Qué es Matemática? El siguiente concepto es producto directo de la palabra *mathemática* proveniente del griego τὰ μαθηματικά, y se define como: “*Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones*” (Real Academia Española, 2009). Esta definición ha autorizado que las matemáticas hayan logrado un estatus de grandeza y de importancia, pero al mismo tiempo un lugar de aborrecimiento por parte de algunas personas; esta conjetura no emanada directamente del diccionario de la Real Academia Española, pero sí de un sentir constante de los matemáticos en la historia de sus investigaciones. La gente del común la reconoce con un estatus de respeto e inteligencia de mentes privilegiadas, odiando las matemáticas tras no entenderlas, dominarlas o comprenderlas. Convirtiéndola así en una ciencia de élites, exclusiva de sabios, eruditos y científicos. ¿Pero este es el concepto de matemáticas? ¿Son las matemáticas excluyentes? ¿Cómo se pueden comprender?; estas y otras preguntas se formulan desde la Pacicultura. Tratando de dar respuesta a estos interrogantes se ha “*Re-significado el concepto de matemáticas*”, para ello se renunció mirar esta ciencia como pura y exacta, y en los estudios que se relacionan con la enseñanza de las matemáticas aparece la **Educación Matemática**, en ella surgen rutas y acercamientos al pensamiento crítico, social, de género, étnico, tecnológico, filosófico y humano, encontrando así nuevos virajes hacia el concepto de Matemáticas y a ellas como Cultura de Paz.

En este transitar se ha podido llegar a pensar en procesos y factores relevantes de una Educación para la Cultura de Paz. El modelo pedagógico **PACICULTURAS** aborda el currículo, los intereses, el contexto y la cultura, los espacios de aprendizaje y las prácticas de los mismos desde la paz como pedagogía, y se relaciona con la definición que el Profesor Ubitaran D'Ambrosio expuso en el concepto de *etnomatemática* en una entrevista donde explicó:

⁴ Esta concepción se trabaja desde la noción de participación en la toma y ejecución de nuevas decisiones bajo grupos sociales.

⁵ Inclusión: es pensado desde el reconocimiento de otro y otra como uno consigo en la toma de decisiones, sumando de manera consciente nuestros quehaceres propios en un nuevo pensamiento o práctica.

“la palabra yo la compuse, quizás otros han utilizado etnomatemática de otra forma, entonces yo inventé esa manera de ver la etnomatemática, como tres raíces, una de ellas es etno y por etno yo comprendo los diversos ambientes social, cultural, natural, la naturaleza, todo eso. Después hay otra raíz, que es una raíz griega que llama mathema y el griego mathema quiere decir explicar, entender, enseñar, manejarse; y un tercer componente es thica que yo introduzco ligado a la raíz griega tecni que es artes, técnicas, maneras, entonces sintetizando esas tres raíces en etnomatemática. Ésta sería las artes, técnicas de explicar, de entender, lidiar con el ambiente social, cultural y natural” (Alvarez, 2008)

El profesor D'Ambrosio plantea el primer paso, donde las diferentes prácticas cotidianas de razonamiento lógico, algorítmico, aritmético y geométrico, diferencian los actos rigurosos y mecánicos de operaciones complejas en las matemáticas escolares, y se convierten en herramientas para la construcción de un nuevo significado de las matemáticas. Hablamos de una visión hacia la inclusión desde las matemáticas cotidianas, proporcionando participación y construcción democrática para posibilitar una democracia participativa y de consensos, expresada en esencia por prácticas motivadas a encontrar una mirada holística y diferenciada a cada hecho en donde las matemáticas son: humanidad, sociedad, política y cultura de paz, justamente por el uso subjetivo que en comunidad le damos, contrario al uso objetivo, particular y desnaturalizado de las mismas en otros procesos y prácticas.

En relación con las prácticas cotidianas y el trabajo en la Pacicultura, es necesario mencionar a profesores como Bishop, y Callejo entre otros, quienes respectivamente han hablado de Enculturación Matemática, procesos emergentes de educar matemáticamente (Bishop, 1999), y Educación Matemática y ciudadanía (Callejo, y otros, 2010), con ellos y otros investigadores la **Educación Matemática** incursiona en apreciaciones conceptuales, de diferentes ramas de la matemática, se transforman conceptos tales como Resolución de Problema y Conflicto.

En las diferentes líneas de trabajo curricular, la educación media a manera dogmática desarrolla contenidos en aprendizajes descriptivos y/o memorísticos de la matemática, por su concepción como ciencia pura y exacta; mientras que la Educación Matemática se propone desarrollar aprendizajes que interioricen las diversas herramientas que la misma matemática propicia: la geometría, la teoría de conjuntos, la aritmética, el álgebra, la estadística, la trigonometría y la lógica. Estas herramientas constitutivas e interdisciplinarias son básicas porque desde ellas se desprenden otras muy representativas como: la física, la informática, el arte, la anatomía, la economía, la ecología, los estudios que caracterizan las ciencias de la salud y los estudios de las ciencias humanas con sus respectivas lógicas. Sin embargo, las características de cada una de estas líneas evidencian una práctica pedagógica y didáctica, que asume retos de enfrentar todas las problemáticas sociales, cotidianas y culturales de una sociedad; ellas proporcionan incluso una matemática aproximada e intuitiva, apoyados en las caracterizaciones que desde estas se generan.

La educación regular no se piensa desde estas ópticas que se desprenden y configuran la matemática; por otro lado en la Educación Matemática conceptos como etnomatemática contextualizan problemáticas de trabajo pedagógico y didáctico dado que se soportan en la interdisciplinariedad y un enfoque holístico, no se retoma la enseñanza de fórmulas y métodos como el fin último de la educación misma. En el caso de la *Pacicultura* y la *Educación Matemática* estas se permiten un currículo contextualizado, los aprendizajes los escogen los estudiantes, dependiendo de sus intereses y cotidianidades, donde convergen todas las sub-ramas que se desprenden de la matemática mencionadas anteriormente. Por ejemplo los intereses de saber sobre el significado de identidad, permite profundizaciones en la lógica, la estética de la geometría humana como factor cultural identitario, incluso la moda que también caracteriza medidas en prendas y el uso del color, en el caso de la aritmética operaciones en la agricultura que forjan una identidad, unidades como carga, bulto, varas y demás componentes comerciales forjan cualidades de identidad social. Es preciso reconocer integralmente las matemáticas configurando el “Aprender a conocer, Aprender a hacer, Aprender a

vivir juntos y Aprender a ser persona” (Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI, 1996). Aprendizajes que son el pilar de trabajo en el Modelo Pedagógico Paciculturas.

En conclusión, el **Pensamiento Matemático** abordado de manera transversal de acuerdo con lo que la Educación Matemática vislumbra como matemáticas, permite encontrar puntos en común de lo que puede definirse como educación para la Cultura de Paz, y en esencia misma de la **Pacicultura**. Desde aquí evidenciamos una fuerte y estrecha relación entre la *Pacicultura y el Pensamiento Matemático* contrario a una posible percepción somera y poco proyectiva de unas matemáticas convencionales o incasables que generen prácticas violentas y excluyentes. Hacemos antesala e invitamos desde lo más profundo de nuestro quehacer docente que como ciudadanos colombianos podamos emerger en la proposición y discusión de la educación en y para la Cultura de Paz podamos construir, en pro de otras miradas pedagógicas, socioculturales, didácticas y educacionales inmersas en las prácticas de la educación.

Referencias

- Alvarez, H. B. (2008). Entrevista al profesor Ubiratan D’Ambrosio. *Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas*, 21-25 pp.
- Bishop, A. J. (1999). *Enculturación Matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona, Buenos Aires, México: Paidós.
- Callejo, M. L., et al. (2010). *Educación Matemática y Ciudadanía*. Barcelona: Grao.
- D’Ambrosio, U. (Febrero de 1985). *Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics For the Learning of Mathematics*. Brasil.
- G, J. M., & Zambrano, J. A. (2010). *Etnomatemática Urbana: Matemáticas en nuestra realidad*. Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.
- Real Academia Española. (2009). <http://www.rae.es/rae.html>. Recuperado de REAL ACADEMIA ESPAÑOLA: http://buscon.rae.es/draeI/SrvltConsulta?TIPO_BUS=3&LEMA=matematica

¿Memorizar las tablas de multiplicar garantiza el aprendizaje y la comprensión en los niños?



Rafael Antonio Reina Ortiz¹

Katherine Viviana Ramírez²

Uno de los temas más importantes que se enseña en la educación básica primaria (o en general en “la escuela”) es la multiplicación, la cual comienza y gira en torno a las famosas tablas de multiplicar. La realidad refleja que desde tiempos antiguos hasta la actualidad, se ha requerido que los niños memoricen estas tablas, además es casi una exigencia de la sociedad (padres, maestros, etc...) para poder avanzar en los estudios.

Consecuentemente, por muchos años en la enseñanza tanto en la primaria como en la media técnica se exige el uso adecuado de las implementaciones de las matemáticas, que es vista para muchos como la memorización de ciertas propiedades que se deben tener en cuenta para temas a abordar en el proceso de formación. Sin embargo, en las escuelas primarias (principalmente) se presenta en los alumnos, el problema de la memorización de las tablas de multiplicar, causada por profesores de esta misma índole que exigen a sus estudiantes

dicha retención para el uso de la misma en grados más superiores, si logran dicho objetivo clave.

No obstante, la idea de la educación en el ámbito matemático es implementar y dar un proceso de innovación en el que los estudiantes modelen su propio razonamiento, sean críticos y por supuesto, construyan su propio conocimiento gracias a las herramientas que el docente provea para dicho proceso de formación, sin la necesidad de la memorización que hoy en día se ha vuelto un problema más de la educación. De esta forma, algunos autores como Kaplan, Yamamoto y compañía afirman que:

La insistencia en la memorización de las tablas de multiplicar plantea una gran presión emocional, tanto a los niños aprendices como a sus padres, quienes tratan de apelar a toda suerte de prácticas mnemotécnicas. (Kaplan, 2007)

¹ Estudiante de Séptimo Semestre, Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Tolima. Ibagué, Tolima. rafuchis__18@hotmail.com

² Estudiante de Séptimo Semestre, Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Tolima, Ibagué, Tolima. kate.1972@hotmail.com

El origen de la multiplicación se presentó por la necesidad de idear un método para saber cuántos animales o cuántas siembras poseía un individuo o una sociedad (egipcios, sumerios y otros). En nuestro tiempo los niños no sienten esa misma necesidad planteada anteriormente, es más, no sienten o no tienen ninguna necesidad de aprender las tablas de multiplicar, más que por obtener buena nota, pasar el año y quizás ser premiado (o castigado en el caso contrario) por sus padres.

En la educación primaria, es común encontrar estudiantes que lideran con las tablas de multiplicar. El sólo hecho de aprenderlas de memoria se vuelve fastidioso, el enseñar y aprender un solo método para multiplicar, se transforma en una tarea tediosa y rutinaria. (Porras, 2012)

Lo más común para que los niños “aprendan” las tablas de multiplicar es que la memoricen, que no es otra cosa sino la repetición de números que operados con otros números dan como resultado otros números. ¿Pero esto tiene sentido para un niño? ¿Está el niño construyendo su propio aprendizaje al memorizar estas tablas?

“En definitiva: para memorizar bien es fundamental una buena concentración, estar motivados y relajados, comprender el material, organizarlo y repetirlo.” (Nunes, 2005)

Se puede identificar que la problemática aumenta en los grados de segundo a tercero, también es evidente que el contexto de la memorización juega un papel importante en el aprendizaje de los niños en este grado, pues usualmente los alumnos se ejercitan con la multiplicación al culminar el grado segundo e iniciar el tercero.

Seguidamente, se interrumpe el aprendizaje significativo puesto que los estudiantes (por causa del maestro) solo tienen una posibilidad,

que es el memorizar para poder lograr un “objetivo” que el maestro quiere implementar en el niño; escribimos objetivo en comillas, pues se sabe que hay un seguimiento riguroso del conocimiento instrumental plasmado tanto por el docente como por la institución educativa.

Por otra parte, hay que reconocer que los pensamientos, intereses, motivaciones y necesidades de los niños son muy distintos a la de los adultos (en particular la del maestro):

Nuestro análisis del desarrollo del pensamiento matemático de los niños se puede considerar como conocimiento científico, como el definido por Vigotsky (1962), que proporciona una base para que los profesores interpreten, transformen y reconstruyan su conocimiento informal o espontáneo sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. (Thomas Carpenter, 1997)

A partir de esto, la tarea de memorizar las tablas de multiplicar (si es que logran memorizarla) es algo muy difícil y aburridor para un niño que no entiende por qué tiene que aprenderlas ni para qué le sirve, cuando lo que él quiere es estar jugando y divirtiéndose con sus amiguitos. Para memorizarlas, los niños recurren a la técnica de los loritos: repitiendo y repitiendo las veces y el tiempo que sea necesario para aprender dichas tablas. El papel del maestro ahí es mal visto: como un corrector en el acto de la repetición o memorización, en contraposición de lo que es ser un buen maestro:

Por ejemplo, Marks identificó lo siguiente como los dos rasgos más importantes del conocimiento de los profesores sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes: a) los estudiantes deben entender conceptos más que aprender por repetición, y b) la abstracción de los conceptos y operaciones matemáticas

debería estar conectada con experiencias con objetos concretos. (Thomas Carpenter, 1997)

Esta es una gran problemática que se presenta en todos los aspectos de la educación, pero que la queremos llevar precisamente a sus inicios, porque nos parece que es allí donde se tiene que hacer más énfasis y se puede lograr un cambio:

Un problema importante con el método tradicional de enseñanza es que favorece a la resolución de problemas más que a la comprensión conceptual. Como resultado, muchos estudiantes memorizan 'las estrategias de resolución de problemas'; por esto la física de los cursos introductorios se vuelve nada más que solución de problemas de memoria y poca adquisición de comprensión de los principios fundamentales. (Mazur, 1990)

El docente, al generar aprendizaje instrumental, sólo se ha de fijar en que el estudiante no tome significado a lo que repita o memorice, es más, sólo se satisface de saber que el estudiante (sin sentido alguno) conteste preguntas puntuales de problemas, tales como: “dos por dos, quince por veinte, etc.”. Si esa es la fundamentación de la memorización, en nuestro caso las tablas de multiplicar, entonces no hay razón para que el estudiante memorice.

El autor Schoenfeld, en su obra *la Enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas currículo y cognición*, toma un gran discurso en el cual expresa la inconformidad con que el estudiante memorice para llegar a un simple objetivo que está planteado rigurosamente en un texto guía. Su expresión es la siguiente:

La circunstancia de que la multiplicación se plantee a los niños desde la enseñanza de su operatividad simbólica, genera en

la planeación curricular una apariencia de logro alcanzable en un corto período de tiempo, puesto que, en el mejor de los casos, un alto porcentaje de los niños acaba por aprenderse las tablas de multiplicar. No obstante, enfrentados a situaciones problema en las que no son directamente visibles las dos cantidades a multiplicar, estos chicos evidencian la ausencia de significado en el aprendizaje matemático. (Schoenfeld, 2007)

De esta forma, es evidente que el niño no tenga dicha concepción de lo que memorice y simplemente deje a un lado el significado que le puede transmitir dichas operaciones. En el diario vivir los números pueden tener distinto significado, no obstante el niño más adelante por causa de la memorización tendrá problemas a enunciados que no conduzca de manera rápida a la instrucción o modelación de una operación de multiplicación.

Entonces, lo que se logra con esta enseñanza es (quizás) una comprensión instrumental y no relacional, en donde los niños tienen que seguir reglas sin razones, en donde el procedimiento y las respuestas tienen que ser exactas como está en los libros y (especialmente) en donde se exige la memorización.

Cuando se aprende de manera instrumental toma bastante tiempo tratar de recordar algo o simplemente se olvida con facilidad, es decir, se aprende o recuerda de momento. Es por esto que muchos llegan a secundaria e incluso universidad y no saben (del todo) las tablas de multiplicar.

Por tal razón, existen hoy en día diversas formas de abordar esta temática con los niños, con el objetivo de corregir todas esas falencias planteadas anteriormente y para obtener mejores resultados (significativos y perduraderos) en el aula de clase.

La tecnología nos brinda una gran posibilidad de acercarnos a los niños y que sean ellos mismos los protagonistas de su aprendizaje, en el cual el papel del maestro sería proveer escenarios o ambientes adecuados para trabajar todos estos conceptos con el fin de que los niños aprendan, para que así edifiquen su aprendizaje sobre bases fuertes y sólidas, lo cual sólo se logra con la compañía de un buen maestro.

Así que, la problemática de la memorización alude al manejo del aprendizaje instrumental que hoy en día los maestros deberían

concientizarse de que no es el camino adecuado para la enseñanza – aprendizaje, se hace necesario generar pensamiento matemático con la utilización de la didáctica en el campo tangible para que los niños modelen su propio conocimiento y por supuesto, den sentido a las concepciones que ellos mismos generen en su proceso de formación. Se debe resaltar que la memorización de las tablas de multiplicar sea por cierto excluido del campo de la enseñanza de las ciencias matemáticas como mecanismo de noción del concepto de la multiplicación.

Referencias

- Kaplan, R.G., et. al. (2007). La enseñanza de conceptos matemáticos. En: *Currículum y cognición*. Buenos Aires: Aique. (pp. 105-139)
- Mazur. (1990). *Cómo piensan y aprenden los niños*. México: Siglo Veintiuno Editores.
- Nunes, T. Y. (2005). *Las Matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño*. Buenos Aires: Siglo XXI Editores.
- Porras. (2012). *Validación de un Programa para la Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas*. México: Alandra.
- Schoenfeld, A. H. (2007). *La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas*. *Currículum y cognición*. Buenos Aires: Aique. (pp. 141-170)
- Thomas C., E. F. (1997). *Instrucción guiada cognitivamente: una base de conocimiento para la reforma de la enseñanza de matemáticas en primaria*. Madrid: Miras.

Diversidad de situaciones para el estímulo del pensamiento matemático

Miguel Ernesto Villarraga Rico¹



1. Introducción

Creer que los niños y niñas llegan a nuestra clase de matemáticas sin conocimientos previos es un error casi general de los docentes de matemáticas. Pues, es común observar a niños y niñas abordar actividades manipulativas o digitales sin haber sido preparados para su abordaje y, sin embargo, quedamos asombrados cuando ellos(as) encuentran soluciones inesperadas a los problemas, juegos, retos, y demás. La creencia de que los estudiantes de básica primaria y secundaria solo aprenden matemáticas en el aula de clase es otro error que conduce a prácticas pedagógicas limitadas y formales con visiones absolutistas de las matemáticas. Al contrario, el ser humano aprende en todo espacio y tiempo lo que le posibilita el aprendizaje de las matemáticas en diversos contextos.

En la gráfica la posibilidad de reconocimiento de un caballo se sucede porque tenemos construido el esquema del caballo, de no ser así, no sería posible reconocerlo.

2. Aprendiendo en contextos naturales (usando sus esquemas)

Los estudiantes emplean sus concepciones para abordar cualquier clase de situaciones o tareas, en consecuencia emplean sus “esquemas” mentales (Vergnaud, 1983; Marshall, 1995; Villarraga, 2002; Benavides, 2006) para abordar, ejecutar y resolver una situación problemática o un problema.

Asumiendo que un esquema mental es una forma de actuación (con contenido) invariante pero dinámica, empleada por un sujeto en la resolución de una clase particular de problemas (en sentido amplio) y que parte de su contenido son los conocimientos previos (redes conceptuales dinámicas); entonces los niños y niñas llegan a nuestras clases de matemáticas con un amplio repertorio de esquemas mentales. Además, el estudiante emplea sus esquemas en la resolución de todo tipo de situaciones y problemas de su vida cotidiana, de otras ciencias y de las mismas matemáticas. Los

¹ Profesor Tiempo Completo del programa Licenciatura en Matemáticas Universidad del Tolima, Ibagué miguelvillarraga@hotmail.com

² Imagen obtenida de: <https://www.google.es/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&docid=cfWN-YybSBQ5gM&tbnid=80gDZblSpJjs5M:&ved=0CAUQjRw&url=http%3A%2F%2Fsites.google.com%2Fsite%2Fgraficante1%2Filustraci%25C3%25B3ntridimensional1-04&ei=dSumUoyLB8flkAeSr4HABQ&psig=AFQjCNF7haEvjEWQYvCr3VChZf3Cf1QTcw&ust=1386708111754135>

niños, niñas y jóvenes en general construyen, evocan y usan sus esquemas mentales en cualquier momento y en cualquier sitio dentro y fuera del aula de clase; hacen uso libre del aprendizaje A como función de su espacio (e) y tiempo (t) particulares; simbólicamente A_i (ti, ei) para el estudiante i. Desde las situaciones o tareas, observadas a través de unas “gafas matemáticas” surgen problemas matemáticos y modelos matemáticos; alguno en particular puede ser asimilado, por parte del sujeto que aprende, a algún (os) de sus esquemas previos.

Si la asimilación no puede llevarse a cabo por algún motivo, entonces ha surgido un desequilibrio conceptual, lo que produce en el sujeto movilidad de otros esquemas y además que intente adaptar sus esquemas cognitivos a la nueva situación, logrando resolverla; llegando así a un nuevo estado de equilibrio, y es entonces cuando decimos que ha surgido un nuevo conocimiento en el sujeto (Piaget, 1967; 1973; Piaget y Beth, 1980; Vergnaud, 1990) porque ha ensanchado o modificado sus esquemas previos, siendo ahora aplicables a nuevas situaciones o a conjuntos más amplios de situaciones o problemas. Por consiguiente el ser humano está preparado para aprender en cualquier espacio y momento de su vida lo que, entre otras cosas, lo hace más humano (Savater, 1995); en particular está preparado para aprender matemáticas en cualquier momento y situación de su vida (Vigotski, 1978; Krutetskii, 1976; Vergnaud, 1998; Villarraga et. al. 2004; Villarraga et. al. 2007).

3. Aprendiendo matemáticas desde actividades y contextos diversos

El proceso de aprendizaje de las matemáticas puede fomentarse a partir de la construcción de una cultura del pensamiento matemático, en la cual los humanos estén inmersos en una vida de cultura matemática diseminada por el entorno y mantenida como una opción de visualizar los fenómenos de la vida cotidiana, de las otras ciencias y por supuesto de las

mismas matemáticas, con “gafas matemáticas”. Esto estimularía el desarrollo paulatino de una visión matemática permanente y continuada, constituyendo posiblemente niños y niñas, jóvenes de ambos sexos y hombres y mujeres con personalidades críticas y activas democráticamente (Skovsmose y Valero, 2012). Desde luego que esta visión de aprendizaje de las matemáticas tiene implícita una concepción del conocimiento matemático: el conocimiento matemático no es absoluto, es decir no viene dado por un conjunto de verdades en forma de proposiciones con sus respectivas pruebas, no es un conocimiento terminado; esto es, el conocimiento matemático es falible y corregible, y siempre puede someterse a revisión y corrección (Ernest, 1991); además el conocimiento matemático es una construcción hecha por seres humanos para humanos.

En consecuencia, resulta factible pensar que los seres humanos puedan aprender matemáticas a partir de los fenómenos que estén presentes en sus contextos (Castro y Villarraga, 2001), a través de identificación y búsqueda de regularidades y patrones mediante una abstracción progresiva.

Freudenthal (1983) ha considerado que “los conceptos, estructuras e ideas matemáticas sirven para organizar los fenómenos—fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas”; él considera que la fenomenología de una idea matemática hace referencia a describir el objeto de pensamiento (noumena: primero objetos mentales y después objeto matemático) en relación con los fenómenos para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los fenómenos para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos (Freudenthal, 1983; 2001). La fenomenología hace referencia a los fenómenos de los cuales se puede predicar el objeto matemático.

Algunos ejemplos dados por Freudenthal (1983, 2001) son los siguientes:

- Fenómeno número se organiza mediante el sistema decimal.
- Fenómeno de los contornos se organiza mediante las figuras geométricas.
- Fenómenos cerca, lejos, medio, en medio, etc., se organizan mediante longitud.
- Fenómenos de aplaudir tres veces, apartar las fichas con tres objetos, jugar a los dados y encontrar tres puntos, dominar la palabra tres se organizan mediante el concepto numérico “tres”.
- Fenómenos de dirigirse en línea recta hacia su objetivo, apartar las fichas con líneas rectas dibujadas, dominar la palabra recto se organizan mediante el concepto “recta”.

Para no intentar dar cuerpo a los conceptos pre-existentes, la Fenomenología didáctica (de Freudenthal) intenta empezar por los fenómenos que “solicitan ser organizados”, y desde ahí, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización. Por ejemplo: Para enseñar el concepto de “grupo”, en determinada edad, no se debería empezar por el concepto de “grupo” buscando los materiales y actividades que den cuerpo (hacer concreto) al concepto de “grupo”, sino que se deberían buscar primero fenómenos que pudieran compeler (estimular, impulsar, incitar, orientar) activa y comprensivamente al estudiante a constituir el “objeto mental” que está siendo matematizado y que llega al concepto de “grupo” (usar método inductivo de búsqueda de regularidades y patrones y no el método deductivo).

“Constituir objetos mentales” precede a la “adquisición de conceptos” y puede ser efectivo aunque no se llegue a la adquisición del concepto. Los objetos mentales (realizables o no geométrica o analíticamente) no dependen del concepto.

Para cada concepto o conjunto de conceptos se debería intentar establecer criterios a satisfacer para considerarlo constituido como objeto mental. Por ejemplo para la “longitud” tales condiciones podrían ser:

- Integrar y diferenciar mutuamente adjetivos que indiquen longitud, como “corto”, “largo”, etc.,
- Comparar longitudes mediante aplicaciones de congruencia y flexiones, medir longitudes mediante múltiplos y fracciones simples de una unidad de medida,
- Aplicar orden y aditividad a los resultados de medir, y
- Aplicar la transitividad de comparar longitudes. (Freudenthal, 1983). En la fenomenología didáctica, el material que sirve para la constitución de un particular objeto mental, tiene un valor duradero y definitivo, es decir el contexto hace parte de la construcción del concepto.

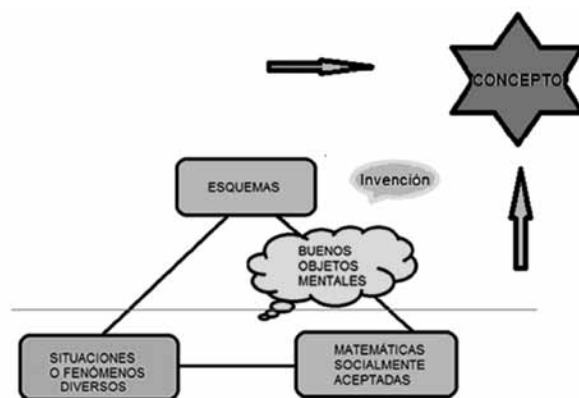


Figura 1. Contextos y aprendizaje de las matemáticas
Fuente: el autor

En la Figura 1 se ilustra el proceso por medio del cual el niño construye buenos objetos mentales. Entre el contexto y el concepto está la constitución de “buenos objetos mentales” (Freudenthal, 1983; Fernández, 2001). La formulación Kantiana de esquema trascendental hace referencia al objeto intermedio o representación mediadora entre lo sensorial

(apariciencia o fenómeno) y lo conceptual o mental (la categoría a-priori). (Ferrater, 1988); sin embargo sin tener en cuenta las categorías a priori kantianas, la psicología ha hecho uso de este concepto en los procesos de aprendizaje.

Psicólogos han adoptado parte de la formulación kantiana, especialmente la conexión entre concepto y percepto (interpretar información sensorial dándole un significado). Actualmente

el esquema bosqueja una aplicación del conocimiento de la persona encontrado en la memoria para construir sentido de alguna experiencia o evento que tiene lugar en su mundo (no se admiten los esquemas innatos) (Marshall, 1995). En consonancia con la fenomenología de Freudenthal, en el esquema de la Figura 2 es donde se hallan los “objetos mentales” de proporcionalidad directa en este caso.

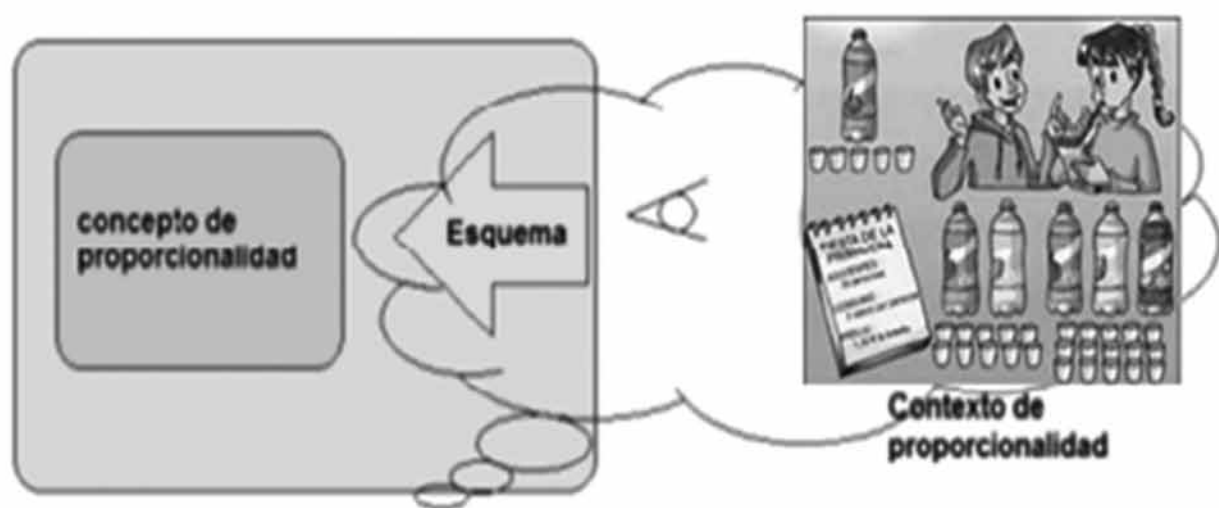


Figura 2. Contextos y aprendizaje de las matemáticas
Fuente: el autor

4. Fenómenos que esperan ansiosamente ser organizados matemáticamente

Puede decirse, entonces, que los fenómenos de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas están esperando ansiosamente a que algún ser humano se apiade de ellos y los mire con “gafas matemáticas” para que los identifique, los compare, los clasifique, les encuentre elementos invariantes (regularidades y patrones) y así les dé un significado conceptual mediante tres aspectos (Vergnaud, 1990):

- Conjunto de situaciones que dan sentido al concepto
- Conjunto de invariantes (propiedades y teoremas implícitos y/o explícitos)
- Conjunto de formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto sus propiedades, las situaciones y procedimientos de tratamiento.

A continuación se ilustran algunas situaciones en fotos y se relaciona un posible objeto con el cual se puede establecer relación, vía la conformación de objetos mentales matemáticos.



Biyección

Fuente: El Tiempo Digital Abril de 2013



Conteo, Polígonos, Recta, etc.

Fuente: Diseño Paola Villarraga



Relación de Equivalencia

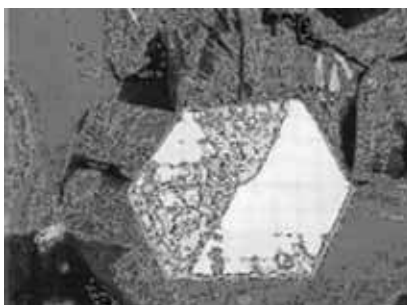
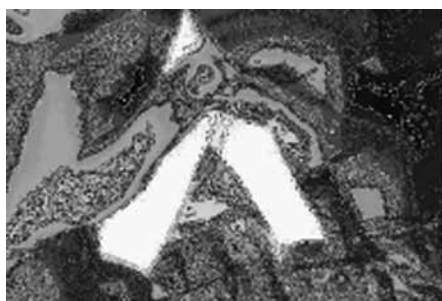
Fuente: Diseño Estefanía Villarraga



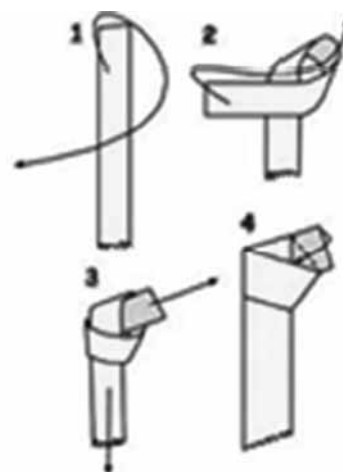
Ángulo, Fuerza
Fuente: Foto de Alejandra Patiño



Sistema Binario
Fuente: Foto de Addy Guzmán



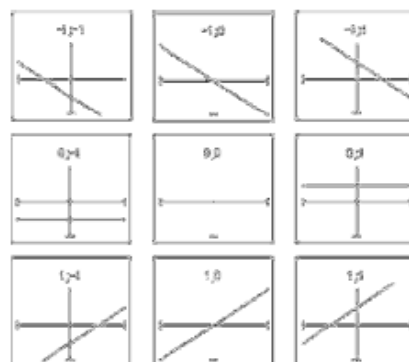
Polígonos Regulares
Fuente: Foto de Adrián Muñoz



a	b	Pendiente $(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$	Punto de corte X	Punto de corte Y
-2	0	$-2 - 0 / 1 - 0 = -2$	0	0
-1	0	$-1 - 0 / 1 - 0 = -1$	0	0
-1/2	0	$(-1/2 - 0) / 1 - 0 = -1/2$	0	0
-1/4	0	$(-1/4 - 0) / 1 - 0 = -1/4$	0	0
1/4	0	$1/4 - 0 / 1 - 0 = 1/4$	0	0
1/2	0	$1/2 - 0 / 1 - 0 = 1/2$	0	0
1	0	$1 - 0 / 1 - 0 = 1$	0	0
2	0	$2 - 0 / 1 - 0 = 2$	0	0

a	b	Pendiente $(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$	Punto de corte X	Punto de corte Y
0	-2	0	No existe	-2
0	-1	0	No existe	-1
0	-1/2	0	No existe	-1/2
0	-1/4	0	No existe	-1/4
0	1/4	0	No existe	1/4
0	1/2	0	No existe	1/2
0	1	0	No existe	1
0	2	0	No existe	2

a	b	Pendiente $(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$	Punto de corte X	Punto de corte Y
-2	-2	$-2 - 0 / 1 - 0 = -2$	-1	-2
-1	-1	$-1 - 0 / 1 - 0 = -1$	-1	-1
-1/2	-1/2	$(-1/2 - 0) / 1 - 0 = -1/2$	-1	-1/2
-1/4	-1/4	$(-1/4 - 0) / 1 - 0 = -1/4$	-1	-1/4
1/4	1/4	$1/4 - 0 / 1 - 0 = 1/4$	-1	1/4
1/2	1/2	$1/2 - 0 / 1 - 0 = 1/2$	-1	1/2
1	1	$1 - 0 / 1 - 0 = 1$	-1	1
2	2	$2 - 0 / 1 - 0 = 2$	-1	2

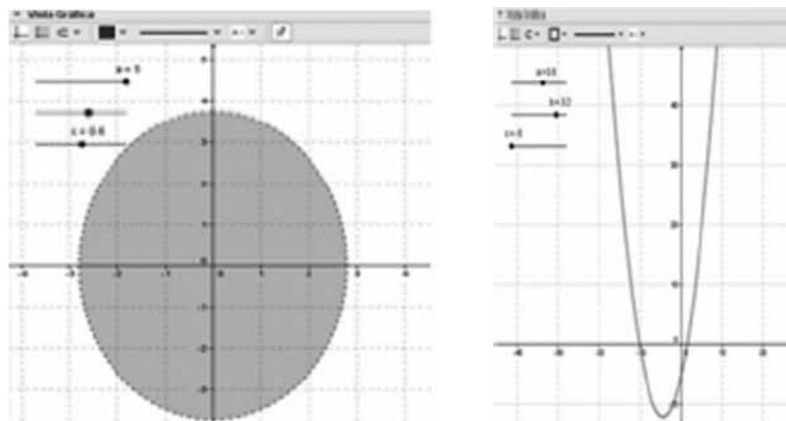


Función Lineal
Fuente: Foto de Alexis Iriarte



Áreas de superficies
Fuente: Foto de Alexis Iriarte

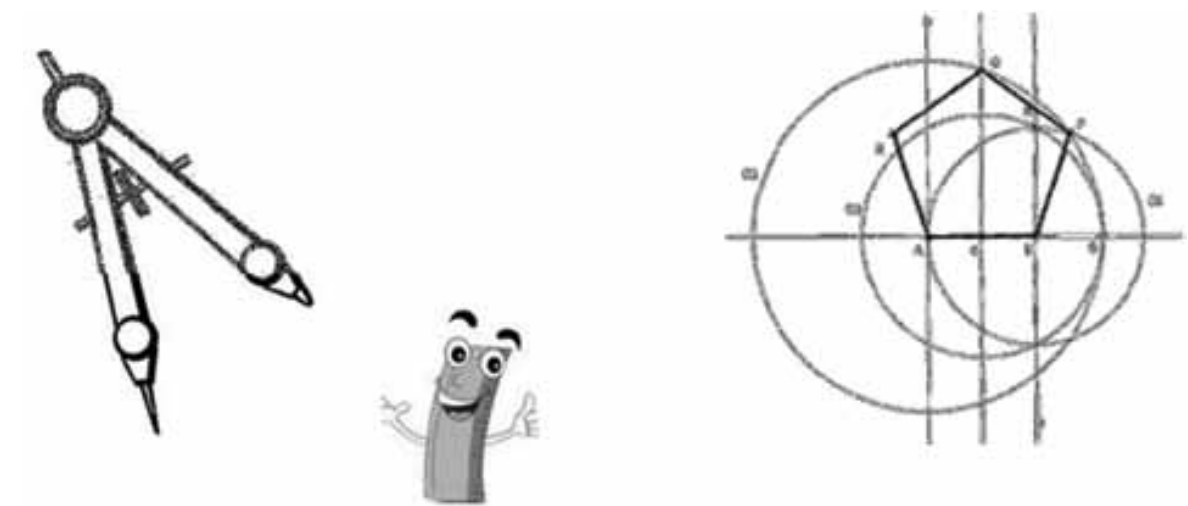




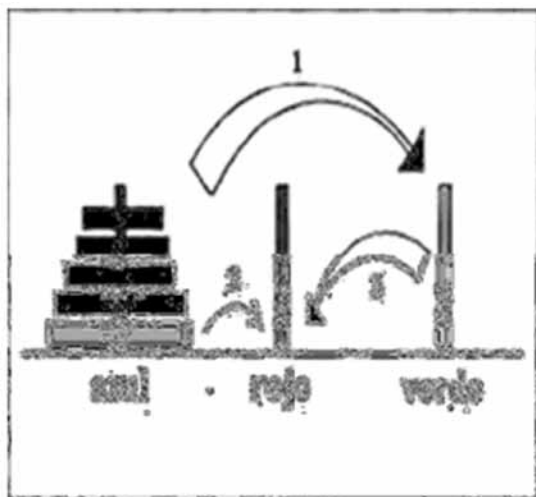
Círculo y Parábola
Fuente: Foto de Bonie Hernández



Permutaciones
Fuente: Foto de Michael Reina

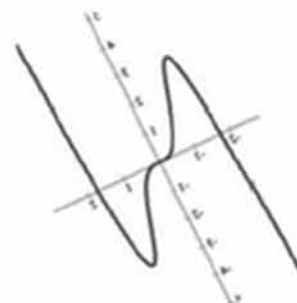
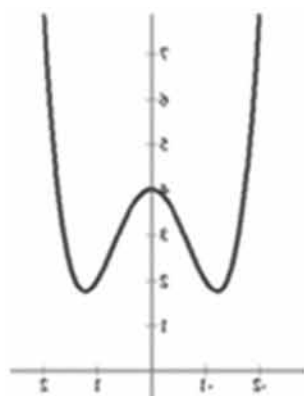


Polígonos con Regla y Compás
Fuente: Alejandra Patiño



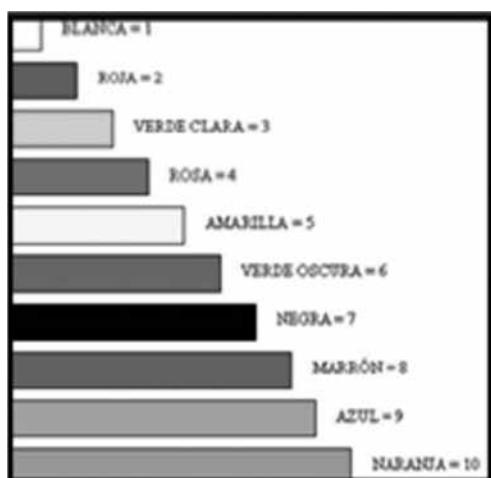
Función

Fuente: Foto de Yuli Milena Rocha



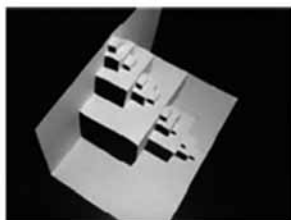
Funciones Pares e Impares

Fuente: Foto Tahiry Rodríguez



Número, Medida, Operaciones

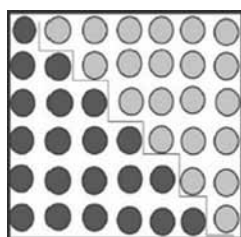
Fuente: Foto de Rafael Reina



Recursividad y Auto-Semejanza. Fractales.
Fuente: Foto de David Andrés Benítez

```
To ARBOL: LONGITUD: ORDEN
If: ORDEN=0 Then [STOP]
ltd. 45
fe: LONGITUD
ARBOL :LONGITUD/2 :ORDEN-1
pu
bk :LONGITUD
rt 90
pd
fd :LONGITUD
ARBOR :LONGITUD/2 :ORDEN-1
pu
bk :LONGITUD
Lt 45
Pd
End
```

Variable, función, composición de funciones, recursividad, auto-semejanza con LOGO



$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$$

Fuente: Foto de Elizabeth Jiménez

Conclusiones temporales

- Ponerse las «gafas matemáticas» permite observar regularidades y patrones posibilitando la abstracción progresiva.
- El juego permite explorar regularidades y funciones matemáticas.
- Los fenómenos observados con «gafas matemáticas» permiten la construcción de conceptos matemáticos.
- El juego potencializa la construcción de objetos mentales matemáticos con el placer de la lúdica.
- Las matemáticas pueden ser reconocidas con toda su belleza desde las representaciones fractales de la naturaleza hasta las organizaciones demostrativas de los teoremas.
- La diversidad de actividades posibilita construcciones diversas de los objetos matemáticos
- La necesidad de la construcción de una cultura matemática es un imperativo regional y nacional, con el objeto de constituir hombres y mujeres críticos y demócratas además de matemáticamente habilitados.

Referencias

- Castro, E. y Villarraga, M. (2001). Resolución de problemas matemáticos y detección de la diversidad en una unidad conceptual. En J. Cardenoso, A. Moreno, J. Navas y F. Ruiz. *Investigación en el aula de matemáticas. Atención a la diversidad*. Granada: Universidad de Granada SAEM THALES.
- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. Bristol: The Falmer Press.
- Freudenthal, H. (1978). *Weedeng and Sowing: A preface to a Science of Mathematical Education*. Dordrecht: D. Rediel.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Rediel.
- Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas*. Textos Seleccionados. Traducción, notas e introducción de Luis Puig. México: Departamento de Matemática Educativa Cinvestav I. P. N.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.
- Piaget, J. (1967). *La Psychologie de L'Intelligence*. Paris: Librairie Armand Colin. [Versión en castellano de Foix, J. C. (1999) *La psicología de la inteligencia*. Barcelona: Crítica].
- Piaget, J. (1973). *Epistemología Genética*. Barcelona: Ariel.
- Piaget, J. y Beth, E. (1980). *Epistemología matemática y psicología*. Barcelona: Crítica.
- Piaget, J., Grize, J., Szeminska, A. & Bang, B. (1968). *Épistémologie et psychologie de la fonction*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Savater, F. (1997). *El valor de educar*. Ariel: Barcelona
- Skovsmose, O. y Valero, P. (Compiladores) (2012). Educación Matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.
- Vergnaud, G. (1990a). La théorie des Champs Conceptuales. *Recherche en Didactique de Mathématiques*, 10, (2-3), 133-170.
- Vergnaud, G. (1998). A Comprehensive Theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), 167-181.
- Vergnaud, G. (1990). Teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques* 10(2,3), 133-170.
- Vigotsky, L. (1978). *Mind in society: the development of higer psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Villarraga, M., Castro, E. y Benavides, M. (2007). Tipologías de sujetos con talento en resolución de problemas de proporcionalidad simple. En: E. Castro y J. Lupiañez (Eds.) *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cáceres Solórzano*, (pp. 259-281). Granada: Universidad de Granada.
- Villarraga, M., Maz, A. y Torralbo, M. (2004). La educación de niños con talento en Colombia. En: M. Benavides, A. Maz, E. Castro, y R. Blanco, R. (Eds.). *La Educación de niños con talento en Iberoamérica*, (pp. 93-103). Santiago, Chile: OREAL-Unesco.

La historia de los números y los sistemas numéricos en diferentes bases

Miguel Ángel Torres Rincón¹

Nicolás Torres Rincón²

Esperanza Lovera de R.³

Resumen. Más que mostrar la historia de los números y algunas operaciones en diferentes bases, el objetivo es mostrar que los niños en edades tempranas pueden desarrollar habilidades matemáticas, más allá de lo que el currículo propone para los primeros grados. El problema se plantea desde la perspectiva de la educación tradicionalista en primaria y cómo los maestros muchas veces no contribuyen a que los niños exploren nuevas alternativas que les posibiliten construir conocimientos matemáticos.

Breve historia de los números

El concepto de número está asociado a la necesidad del hombre de contar personas, rebaños, productos de la agricultura, de la pesca y los hombres de todas las culturas se han ideado la forma de hacerlo. Algunos contaban con piedras, con nudos hechos en fibras tomadas de la vegetación o con algunas rayas realizadas sobre piedras o sobre hueso.



Como es de suponerse el conteo con base en rayas, nudos y piedras fue haciéndose dispendioso y además el hombre empezó a sentir

la necesidad de elaborar registros, apareciendo diferentes símbolos en las diferentes culturas

UN EJEMPLO ES EL SISTEMA NUMÉRICO DE LOS MAYAS

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	29

Sistemas numéricos posicionales en diferentes bases

Un sistema de numeración es un conjunto de símbolos y normas que permite escribir todos los números y si el sistema de numeración es posicional, el mismo símbolo cambia de valor de acuerdo a la posición.

En los sistemas de numeración en diferentes bases, la base n indica que se necesitan n símbolos para escribir todos los números y que n unidades forman una unidad de la siguiente posición

- Los estudiantes Nicolás y Miguel Ángel Torres Rincón, de seis y ocho años de edad respectivamente, presentan las propiedades de los sistemas numéricos en diferentes bases y la forma de operarlos con respecto a la suma, la resta y la multiplicación.

¹ 8 años de edad. Estudiante de Primaria

² 6 años de edad. Estudiante de Primaria

³ Asesora. Estudiante de IV semestre de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C. dma_loverad912@pedagogica.edu.co

Referencias

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad.

Brito, H., Sistemas de numeración. Recuperado de <http://www.monografias.com/trabajos83/sistemas-de-numeracion/sistemas-de-numeracion.shtml>

Luque, C. J., Mora, L C., Torres, J. A. (2005). *Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos. Clasificar, medir e invertir*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Explorando el mundo de los números N-Males

Jhon Alexander Gómez Aponte¹

Maria Inés Cano Villamil²

Esperanza Lovera de Rincón³

Resumen. Dentro de las diferentes representaciones de los números racionales es posible encontrar la de número decimal, y de una manera más general, la de número n-mal, la cual surge a partir de la división de dos números naturales en diferentes bases numéricas. El objetivo de este trabajo es presentar algunas generalizaciones encontradas en cuanto a la división de dos números naturales para obtener un número N-Mal.

En primer lugar, es necesario hacer una contextualización en cuanto a las diferentes representaciones de los números naturales según las bases numéricas, es decir:

Recordemos que el valor posicional de cualquier símbolo en la base 10 está dado por la siguiente estructura:

10^n	...	10^3	10^2	10^1	10^0	,	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	...	10^{-n}
--------	-----	--------	--------	--------	--------	---	-----------	-----------	-----------	-----	-----------

Donde un número ubicado en una posición tendrá el valor dado por la tabla. Todo lo anterior puede verse de manera más general así:

m^{1^n}	...	m^{1^3}	m^{1^2}	m^{1^1}	m^{1^0}	,	m^{-1^1}	m^{-1^2}	m^{-1^3}	...	m^{-1^n}
-----------	-----	-----------	-----------	-----------	-----------	---	------------	------------	------------	-----	------------

Lo cual representa el valor posicional para una base m , siendo m un número natural mayor que 1.

Con base en todo lo anterior, el siguiente paso es pensar cómo obtener números de ese tipo (n-males), y un camino para ello es la división, dado que por ejemplo:

$$1/5_{(2)} = 0,0011$$

Lo cual es un número n-mal en base 2; por ende el primer paso es generalizar en términos de la base, teniendo en cuenta el siguiente procedimiento (justificado por el algoritmo de la división de Euclides) (Grimaldi, 2004), es decir:

"Bajar el cero" es equivalente a multiplicar por la base

$$\begin{array}{r} 1 \\ \leftarrow 5m \leftarrow 10 \\ \hline 10 \\ - 0 \end{array} \xrightarrow{5_{(5m)}} \begin{array}{r} 0, m \\ \hline 10 \\ - 0 \end{array}$$

Bases en las cuales se efectúa la operación

De donde podemos conjeturar que:

$$1/5_{(5m)} = 0, m$$

Así mismo podemos ver que

$$\begin{array}{r} 1 \\ 5m + 1 \leftarrow 10 \\ \hline 1 \end{array} \xrightarrow{5_{(5m+1)}} \begin{array}{r} 0, \hat{m} \\ \hline 10 \\ - 0 \end{array}$$

Por ende:

$$1/5_{(5m+1)} = 0, \hat{m}$$

y con procedimientos similares podemos ver que:

$$1/5_{(5m+2)} = 0, \overbrace{m \ 2m \ 4m + 1 \ 3m + 1}$$

¹ Estudiante de IV semestre, Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C. dma_jgomez946@pedagogica.edu.co

² Estudiante de IV semestre, Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.

³ Estudiante de IV semestre de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C. dma_eloerad912@pedagogica.edu.co

$$\frac{1}{5_{(5m+3)}} = 0, \overbrace{m \ 3m + 1 \ 4m + 2 \ 2m + 1}$$

$$\frac{1}{5_{(5m+4)}} = 0, \overbrace{m \ 4m + 3}$$

Es evidente que este procedimiento funciona para cualquier divisor, por ende podemos considerar el siguiente caso:

$$xm \leftarrow \frac{1}{0} \left| \frac{x_{(xm)}}{0, m} \right. \quad x > 1$$

Debido a que nos basamos en el mismo algoritmo, podemos asegurar que este procedimiento también funciona, o sea, podemos conjeturar que:

$$\frac{1}{x_{(xm)}} = 0, m \quad \text{si } x > 1$$

Para continuar con el proceso de generalización podemos considerar el siguiente caso:

$$xm + q \leftarrow \frac{1}{q0} \left| \frac{x_{(xm+q)}}{0, m} \right. \quad \begin{matrix} x > 1 \\ q < x \end{matrix}$$

Puesto que q es un número natural fijo pero arbitrario no sabemos el valor de $q0$, por consiguiente no podemos llegar a una generalidad. Para efectos de lograr nuestro cometido consideremos el siguiente caso:

$$x(nm) \leftarrow \frac{n}{n0} \left| \frac{x_{(nm)}}{0, (nm)} \right. \quad x > n$$

De donde podemos conjeturar lo siguiente:

$$\frac{n}{x_{(nm)}} = 0, (nm) \quad \text{si } x > n$$

Ahora para continuar con nuestro proceso de generalización consideremos el siguiente caso:

$$x(mn) + qn \leftarrow \frac{n}{n0} \left| \frac{x_{(xm+q)}}{0, (mn)} \right. \quad \begin{matrix} x > n \\ q < x \end{matrix}$$

Como qn no tiene un valor fijo por la razón expuesta anteriormente, esto sugiere considerar el siguiente caso:

$$x(mn) + qn \leftarrow \frac{n}{n0} \left| \frac{x_{(xm+q)}}{0, (mn + 1)} \right. \quad \begin{matrix} x > n \\ q < x \\ qn = x \end{matrix}$$

Este hecho nos permite conjeturar lo siguiente:

$$\frac{n}{x_{(xm+q)}} = 0, nm + 1 \quad \begin{matrix} n < x \\ q < x \\ qn = x \end{matrix}$$

Anteriormente se tuvo en cuenta el caso $qn=x$, lo cual sugiere considerar el siguiente caso:

$$\frac{x(mn) + qn}{x(qmn) + q^2n} \leftarrow \frac{n}{qn0} \left| \frac{x_{(xm+q)}}{0, (mn)(qmn)} \right. \quad \begin{matrix} x > n \\ qn < x \end{matrix}$$

Bajo este caso es evidente ver que el residuo será qn , lo cual nos genera el mismo problema con q^2n , por lo tanto podemos considerar el siguiente caso:

$$\frac{x(mn) + qn}{x(qmn) + q^2n} \leftarrow \frac{n}{qn0} \left| \frac{x_{(xm+q)}}{0, (mn)(qmn)} \right. \quad \begin{matrix} x > n \\ q^2n < x \end{matrix}$$

Es evidente que persiste el mismo problema con q^3n , y de manera más general con q^pn , lo cual sugiere el siguiente caso:

$$\frac{x(mn) + qn}{x(qmn) + q^2n} \leftarrow \frac{n}{qn0} \left| \frac{x_{(xm+q)}}{0, (mn)(qmn)(q^2mn) \dots ((q^{p-1}mn) + 1)} \right. \quad \begin{matrix} x > n \\ q < x \\ q^pn = x \end{matrix}$$

Lo cual nos permite conjeturar lo siguiente:

$$\frac{n}{x_{(xm+q)}} = 0, (mn)(qmn)(q^2mn) \dots ((q^{p-1}mn) + 1) \quad \begin{matrix} n < x \\ q < x \\ q^pn = x \end{matrix}$$

Hasta ahora hemos mostrado un posible camino para la obtención de números n -males a partir de la división de dos números naturales, lo cual se puede seguir explorando a partir de las caracterizaciones hechas en este documento. Invitamos al lector interesado a seguir explorando este mundo tan fascinante.

Referencias

- Gómez A., J. A. & Lovera de R., E. (2013). Explorando el mundo de los números n -males. Artículo inédito no publicado
- Grimaldi, R. (2004). *Discrete and combinatorial mathematics: An Applied introduction*. United States of America: Pearson Editions.
- Luque , C., Páez, J. & Mora , L. (2002). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos*. Bogotá: Antropos.

El trabajo experimental asistido por recursos informáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Física

Carlos Enrique Sifredo Barrios¹
Livan Ayala Espinosa²

Introducción

La contradicción persistente entre la importancia del trabajo experimental para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Física y las dificultades que se presentan en la práctica para la instrumentación de este tipo de actividad, se ha profundizado en los últimos años como consecuencia de múltiples factores, entre los que resaltan los relacionados con: los costos y la seguridad, el tiempo disponible para impartir los diferentes temas, el tiempo real de los alumnos para cumplir con sus obligaciones docentes y los recursos materiales disponibles. Sin embargo, otra causa no menos importante es la relacionada con **las percepciones subjetivas y objetivas de los directivos, profesores y alumnos** sobre el trabajo experimental escolar. Baste anotar, en este sentido, que aún cuando no existan las dificultades inicialmente señaladas, con mucha frecuencia persisten las limitaciones para el desarrollo de estas actividades (Valdés, P. y Sifredo, C., 2008).

Por otra parte, la influencia que en el trabajo experimental han tenido las tecnologías de la información y las comunicaciones aún no han encontrado el necesario reflejo en el proceso de enseñanza aprendizaje, sobre todo en lo relacionado con un aspecto que resulta esencial: poderoso instrumento para la resolución de problemas.

En este curso, concebido como una ampliación y profundización de los ofrecidos en el contexto del IV y VI Congresos Internacionales “Didácticas de las Ciencias”, celebrados en los años 2006 (Valdés, P. y Sifredo, C., 2006.) y 2010 (Sifredo, C., 2010) respectivamente, se propone, de forma fundamentada, una concepción para modernizar, facilitar y propiciar el desarrollo de las actividades experimentales en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Física. Puede

resultar conveniente señalar que la concepción a que se hace referencia no solo se refiere al uso de los instrumentos de medición y otros medios de laboratorio, sino esencialmente a los métodos de trabajo, al lugar que deben ocupar las actividades experimentales en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Física y a la necesidad de que el trabajo experimental escolar no sea frenado por razones de carácter económico o por las percepciones objetivas y subjetivas de los alumnos y profesores sobre este tipo de actividad.

En la primera parte de este artículo se presentará de manera breve la concepción que se propone y la descripción de las herramientas para su instrumentación y, en la segunda parte, se desarrollará algunos ejemplos concretos del trabajo con las herramientas propuestas. Se debe señalar finalmente que en este trabajo no nos detendremos en los presupuestos teóricos de carácter general relacionados con el trabajo experimental, que los interesados podrán encontrar en el capítulo 4 (Furio, C., Paya, J., Valdés, P., 2008) del libro *Didácticas de las ciencias: Nuevas Perspectivas*.

Herramientas para modernizar, facilitar y propiciar el desarrollo de las actividades experimentales en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Física.

En la actualidad, modernizar, facilitar y propiciar el desarrollo de las actividades experimentales en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Física en los diferentes grados de la educación media (también en el nivel superior, incluyendo la formación de profesores), así como su implementación de manera, sencilla, económica, atractiva y coherente con sus objetivos, constituye uno de los elementos claves para mejorar la calidad del proceso de enseñanza

¹ Asesor de Física del Ministerio de Educación de Cuba. sifredo@mined.rimed.cu

² Universidad de Ciencias Pedagógicas “Rubén Martínez Villena”. Cuba. livan@ucpvillena.rimed.cu

aprendizaje de la Física.

Por supuesto, esto plantea un problema de primer orden en lo referente a la formación y capacitación adecuada de los profesores para implementar en la práctica escolar todo lo relacionado con el trabajo experimental.

La trascendencia del problema deriva, en sentido general, del postulado pedagógico esencial de que “educar es preparar para la vida”. Por supuesto, todo lo relacionado con la modernización y la instrumentación del trabajo experimental va de la mano con la propia actualización de los cursos de Física, pero lo relacionado con el trabajo experimental plantea una problemática específica que deviene en importante reto para la Didáctica de la Física y es en esta cuestión en la que se centra el presente trabajo.

El problema de la modernización también está directamente relacionado con la necesidad de superar las visiones distorsionadas y empobrecidas de las ciencias (Valdés P., Sifredo C., 2008), generadas por malas prácticas durante el proceso de enseñanza aprendizaje, que son de hecho una de las causas principales del desinterés por el estudio de la Física y del fracaso de muchos estudiantes en esta disciplina.

Por otra parte, tampoco es cuestión de segundo orden, como revela la propia práctica docente, la necesidad de que el trabajo experimental escolar no sea frenado durante el desarrollo de los cursos de Física por razones no solo de carácter económico, sino fundamentalmente, como ya ha sido señalado, por las percepciones objetivas y subjetivas de los alumnos y profesores sobre este tipo de actividad.

Puede ser también necesario llamar la atención sobre algunas tendencias superficiales en cuanto a considerar que basta con programar abundantes trabajos de laboratorio, para que los alumnos se mantengan fuertemente motivados por esta disciplina y logren sólidos conocimientos sobre la misma (Gil D. et al, 1991).

Resulta particularmente importante tener en cuenta que **la concepción a que hacemos referencia no solo alude a los instrumentos de medición y**

otros medios de laboratorio, sino esencialmente a los métodos de trabajo y al lugar que deben ocupar las actividades experimentales en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Física, en correspondencia con los resultados de las investigaciones en el campo de las didácticas de las ciencias. Para instrumentar el trabajo en esta dirección se proponen aquí, de forma fundamentada, el sistema de “herramientas” siguiente:

- 1) La “tecnología” para el video-análisis.
- 2) Los instrumentos de medición virtuales.
- 3) Las plataformas profesionales (o escolares) para el diseño y simulación de Fenómenos físicos.
- 4) Los recursos “caseros” y/o los “tradicionales” del laboratorio escolar.
- 5) Los sistemas para la adquisición y rocesamiento de datos experimentales mediante computadoras
- 6) El diseño y puesta a punto de dispositivos tecnológicos sencillos.

Por supuesto, existen otras “herramientas” que también pueden ser útiles, pero en este trabajo solo abordaremos estas seis, aunque entre ellas está implícito el uso de otras, por ejemplo, las hojas de cálculo. La precisión, de forma resumida, de las potencialidades de estas herramientas y la ilustración mediante ejemplos del trabajo con algunas de ellas, será el propósito de los apartados siguientes.

La “tecnología” para el video-análisis.

La utilización del análisis de videos experimentales (figura 3.1) permite **incorporar con facilidad, en las condiciones escolares, investigaciones del mundo real** y operar con aplicaciones auténticas de las representaciones gráficas, numéricas y analíticas en estudios de Física (también de Matemática) de manera económica, accesible y asequible, a pesar de ser una sofisticada tecnología de punta.

De hecho, **esta tecnología constituye un fértil punto de partida para la utilización de los recursos informáticos en la solución de problemas de carácter experimental** en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Física y para transformar los trabajos de laboratorio habituales en verdaderas tareas de interés.

Esto está en correspondencia con las amplias posibilidades de utilizar este recurso en muchos de los temas de Física y su “potencia” para estudiar problemáticas experimentales reales y complejas, **principalmente en el campo de la mecánica** (también en temas de análisis espectral), de manera interesante y asequible para los estudiantes del nivel medio y universitario.

Además de la flexibilidad de este recurso para acometer las tareas experimentales asociadas a todos los temas de mecánica y algunos otros, se propicia que “el 5° laboratorio” no solo esté en los marcos estrechos de la escuela, sino en la casa, un parque, un estadio deportivo o cualquier otro espacio físico apropiado para la actividad que se quiera desarrollar.

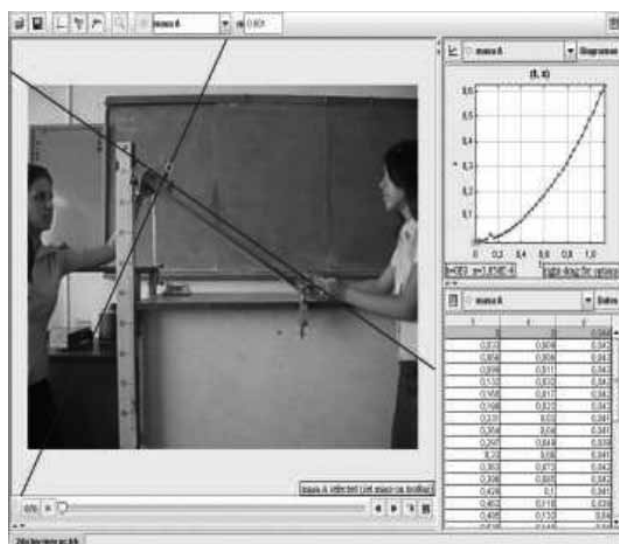


Figura 3.1

Por otra parte, puede ser conveniente destacar que **el análisis de videos experimentales constituye también una importante vía para contribuir a superar algunas de las barreras que, a pesar de sus indiscutibles ventajas, han obstaculizado y/o distorsionado el trabajo experimental escolar**, por ejemplo, las relacionadas con: los costos y la seguridad, el tiempo disponible para impartir los diferentes temas, el tiempo real de los alumnos para cumplir con sus obligaciones docentes, los recursos materiales disponibles y las ya mencionadas y no menos importantes **percepciones subjetivas y objetivas de los profesores**.

Debe señalarse también que para implementar este trabajo existen en la actualidad gran cantidad de programas informáticos, tanto comerciales como libres. En particular, recomendamos aquí la utilización de “Tracker” (Brown D., 2009), pues en nuestra opinión presenta muchas ventajas en términos didácticos y de calidad para el trabajo experimental, siendo también “libre”, gratis y de código abierto. En la figura 3.2 se pueden apreciar los detalles de la presentación inicial de interfaz gráfica de Tracker (versión 4.5) y el procesamiento de los datos experimentales obtenidos mediante el análisis del video (figura 3.3) de un experimento, similar al que, a manera de ejemplo, se presentará en el apartado. §9.6 *Didácticas de las ciencias, nuevas perspectivas*.

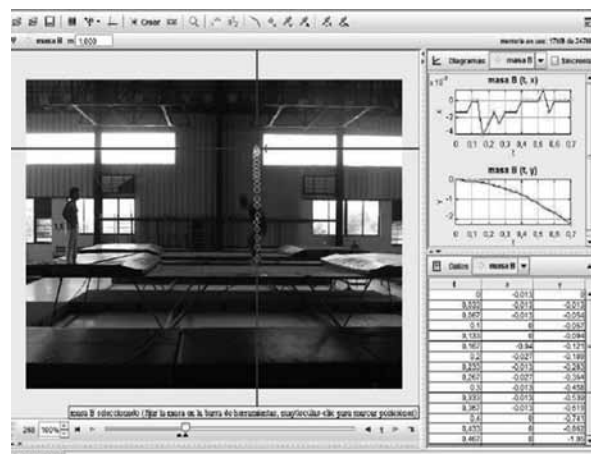


Figura 3.2

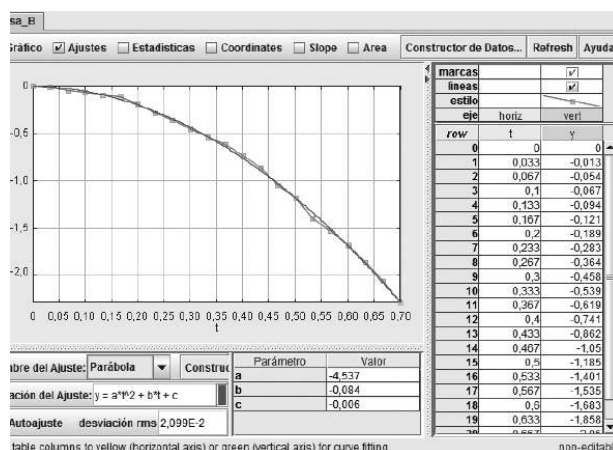


Figura 3.3

Utilización de instrumentos virtuales para el estudio de fenómenos y mediciones en experimentos físicos

La mayoría de las computadoras poseen una tarjeta de sonido incorporada que se considera como un dispositivo de entrada y salida de audio y es comúnmente utilizada para la reproducción, grabación o sintetización de música, canciones o sonidos en general. Sin embargo, este dispositivo presenta también una amplia gama de posibilidades para el trabajo experimental en Física, permitiendo además una considerable racionalización de los laboratorios escolares en costosos equipos como, por ejemplo, osciloscopios y generadores de señales.

Desde el punto de vista de la instrumentación, una tarjeta de sonido es un dispositivo compuesto por convertidores analógicos-digitales (ADC) y digitales-analógicos (DAC) de dos canales, que poseen una respuesta de frecuencias en el rango de las audiofrecuencias, con una tasa de muestreo de hasta 192 kHz a una profundidad de 24 bits. Aún sin ningún circuito externo de amplificación o atenuación, con estos dispositivos se pueden medir señales en un rango de amplitud desde 1 μ V hasta 1 V aproximadamente, gracias a los controles de ganancia que tienen incorporados.

El diseño de las tarjetas de sonido permiten una transferencia y almacenamiento de datos de forma continua, pues disponen de la mayor cantidad de memoria reservada en el sistema para el procesamiento, esto hace que posean capacidades de lectura y transmisión de datos mucho mayor que los osciloscopios ordinarios.

En otras palabras, es posible convertir la computadora en un instrumento de medición a partir de la utilización de la tarjeta de sonido como interface (*hardware*) y de instrumentos virtuales (*software*) que realizan múltiples funciones como: osciloscopios, generadores de señales, multímetros digitales, analizadores de espectros, entre otros.

La calidad y exactitud de las mediciones depende del hardware de la tarjeta, en este sentido las tarjetas profesionales de sonido son las que poseen mayor precisión y mayores tasas de muestreo de datos, por lo que pueden ser tan buenas como los convertidores DAC y ADC profesionales para la gama de las frecuencias audibles.

Una de las limitaciones de la tarjeta de sonido es que no se pueden medir señales de corriente directa (CD) debido al hecho de que su entrada y salida es mediante acoplamiento de señales de corriente alterna (CA), otra de las limitaciones es que necesitan ser calibradas si se desean realizar mediciones de los valores absolutos de las magnitudes medidas, en este caso es necesario poseer un patrón para la calibración de cada instrumento.

El proceso de transmisión de señales hacia el interior o exterior de la computadora por la tarjeta de sonido se realiza mediante los conectores de entrada y salida que posee:

- Ø Entrada analógica para micrófono (MIC),
- Ø Línea de entrada analógica (LINE IN),
- Ø Salida de audio analógica (SPEAKER)

La forma más simple de realizar mediciones es conectar directamente la señal que se desea medir a las entradas "MIC" o "LINE IN", sin embargo esta conexión requiere de extremo cuidado para asegurar que los parámetros de la señal de entrada estén dentro de los rangos admisibles y no dañe el hardware de la tarjeta. Para proteger las entradas y salidas se utilizan arreglos de circuitos que realizan la función de atenuadores, de esta forma limitan los excesos de voltaje y corriente hacia el interior de la computadora (los que son procesados por osciloscopios, analizadores de espectros, multímetros, contadores de frecuencia); o hacia el exterior de la computadora (las señales que envían los generadores de funciones).

A manera de ejemplo, se presentan a continuación algunos instrumentos virtuales muy difundidos y comúnmente utilizados para la medición o exportación de señales mediante la tarjeta de sonido de la computadora.

Oscilloscope (Fig. 4.1) y Zelscope (Fig. 4.2)

Estos son dos ejemplos de osciloscopios digitales de dos canales con analizadores de espectros. Los instaladores correspondientes se pueden obtener en: zelscope.com

OSCILLOSCOPE ZELSCOPE

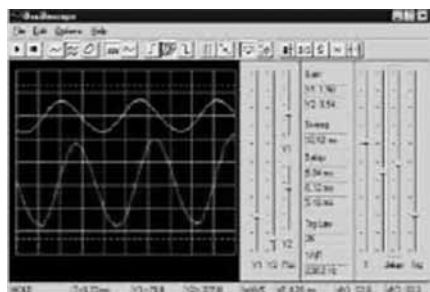


Figura 4.1

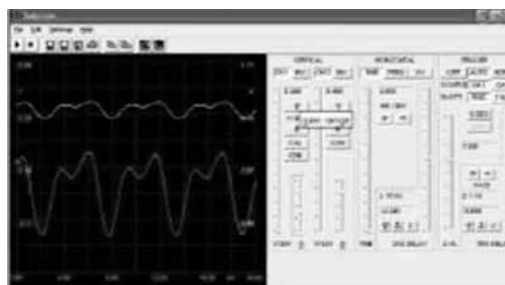


Figura 4.2

Frecuency counter (Fig. 4.3) y rpminindicator (Fig. 4.4)



Figura 4.3

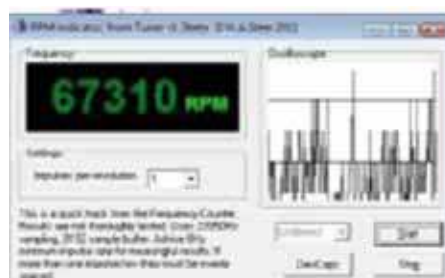


Figura 4.4

Los instaladores de estos dos ejemplos de contadores digitales se pueden obtener en:
<http://www.techmind.org/audio/>

Sine wave generator (Fig. 4.5) y audio sweep generator (Fig. 4.6)



Figura 4.5



Figura 4.6

Los instaladores para estos generadores de señales pueden obtenerse en:
www.electronics-lab.com - www.davidtaylor.freemove.co.uk

VIRTINS Multi-Instrument (Fig. 4.7)

Es un instrumento virtual que integra múltiples funciones en una misma interfaz gráfica. En la imagen (Fig. 4.7) se muestra el osciloscopio de dos canales, el analizador de espectros de 2 canales, el generador de señales y el multímetro digital indicando el valor de la frecuencia; además posee otros instrumentos.

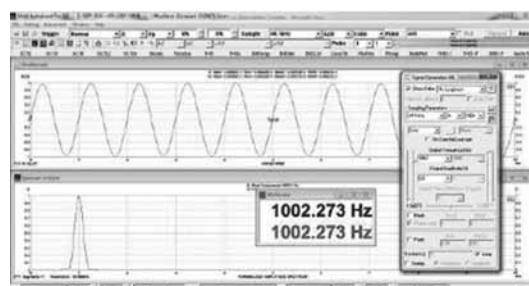


Figura 4.7

Este es el instrumento que se utilizará en los ejemplos que se presentan en el último apartado de este trabajo. Una versión de prueba por 21 días puede ser obtenida en la dirección siguiente:

http://download.cnet.com/Virtins-Multi-Instrument/3000-2170_4-10346227.html

Plataformas profesionales (o escolares) para el diseño y simulación de fenómenos físicos.

Los softwares “Física Interactiva”, “Electronics Workbench” y Proteus, (también existen variantes no comerciales), por ejemplo, constituyen recursos de este tipo que permiten abordar el diseño de experimentos para estudiar mediante simulación matemática, los más variados fenómenos en el campo de la mecánica y la electricidad. Otros tipos de plataformas para la simulación de fenómenos físicos, por ejemplo, son Modellus y FisMat. Tracker también tiene incorporada una potente herramienta para la simulación analítica y dinámica del movimiento de una partícula.

Debe señalarse que, en las condiciones contemporáneas, este es un proceder clave del trabajo experimental y en virtud de ello, debe tener su reflejo en el experimento escolar.

El trabajo con estas plataformas resulta también muy prometedor para complementar la resolución de problemas de lápiz y papel mediante la investigación asistida por estos recursos. Las primeras indicaciones de este tipo de trabajo con los estudiantes apuntan a un incremento del interés y un elevado nivel de profundización de los conceptos y leyes físicas que se ponen en juego (Lastra. M., Barroso, R, Sifredo C., 2012).

Recursos “caseros” y/o “tradicionales” del laboratorio escolar.

La realización de experimentos, sencillos o complejos, mediante la utilización de los medios “tradicionales” de los laboratorios escolares o recursos “caseros” (de fácil adquisición) juega un importante papel en el proceso de adquisición de sólidos conocimientos y en el desarrollo de habilidades generales y para el trabajo experimental. Por supuesto, esta actividad también se enriquece

notablemente al asociarla con el procesamiento de los datos experimentales, cuando resulta necesario, con el apoyo de las computadoras.

Puede ser conveniente señalar, en tanto es algo que se ignora con mucha frecuencia, que con muy pocos recursos se puede desarrollar un fecundo trabajo experimental y que esto resulta muy conveniente aunque se dispongan de otro tipo de recursos para ello.

Una mejor y más acabada comprensión de lo antes planteado se puede hacer patente mediante el examen de los ejemplos que sobre este tópico se presentan en el apartado §9 *Didácticas de las ciencias, nuevas perspectivas*.

Adquisición y procesamiento de datos experimentales mediante computadoras.

Aunque las posibilidades de utilizar este potente recurso son en general muy amplias se requiere para ello, en la mayoría de los casos, de que se pueda disponer de los “sensores Inteligentes” necesarios para las mediciones y de los w (por lo general comerciales) apropiados para el trabajo con estos dispositivos.

En el marco de esta concepción, lo esencial en este caso es la familiarización de los estudiantes con otra de las “técnicas” del trabajo experimental en las condiciones contemporáneas.

En correspondencia con esto último se concibe utilizar este recurso solo para algunas actividades de investigación, en las que esta variante sea la más apropiada o no se pueda proceder de otra manera. También se recurre a la utilización de algunos diseños en que los “sensores inteligentes” se reemplazan por otros dispositivos tales como la propia tarjeta de sonido de la computadora, tal y como se ha explicado en el apartado 2.

En los ejemplos del apartado §9 para el trabajo con estos dispositivos, se utiliza el sistema IDES (Intelligent Digital Experiment System) de manufactura China.

El diseño y puesta a punto de dispositivos tecnológicos sencillos.

Este tipo de actividades se pueden desarrollar con recursos que en general están al alcance de los estudiantes y son muy útiles por el interés que suelen despertar en ellos como consecuencia de sus sorprendentes resultados y la posibilidad de poner en práctica su creatividad e inventiva, contribuyendo de manera significativa a profundizar en la esencia de los fenómenos estudiados y las leyes correspondientes.

Dos ejemplos típicos de este tipo de actividades son el de la construcción de un modelo de motor eléctrico (fig. 8.1), de un cohete (Figura 8.2), etc., para la que solo son necesarios recursos que por lo general están al alcance de los alumnos.

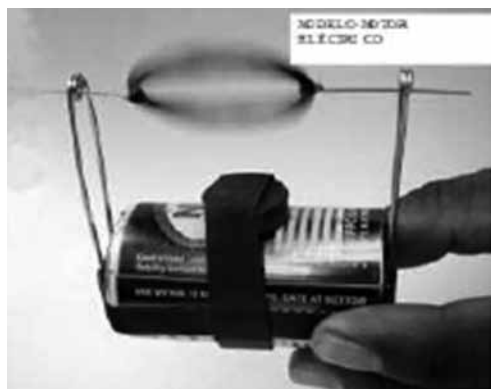


Figura 8.1



Figura 8.2

En general, este proceder se inserta en la concepción más general de “pedir a los estudiantes (y previamente, por supuesto, plantearse los mismos profesores) que conciban distintos procedimientos para resolver el problema planteado, explicando con algún detalle

la forma de proceder, los conocimientos científicos implicados, las relaciones CTSA vinculadas, etc., pero poniendo el acento en la realización práctica, en el correcto funcionamiento del diseño y en la presentación “al público” (Furio, C, Payá, J., Valdés, P., 2008).

En el capítulo 4 del libro “¿Cómo promover la cultura científica en las edades de 15 a 18 años? Una propuesta didáctica fundamentada” se sugieren abundantes actividades de este tipo (Furio, C, Payá, J., Valdés, P., 2008).

Ejemplos de actividades experimentales

Ejemplo 1: estudio experimental del movimiento de los cuerpos bajo la acción de la fuerza de gravedad utilizando el análisis de video.

Si bien este es uno de los ejemplos más familiares y aparentemente sencillo de situación objeto de estudio de manera experimental, cuyo análisis reviste una importancia capital, su ejecución en el contexto escolar presenta grandes retos y dificultades.

Esta es una de las muchas situaciones en que la utilización del análisis de video permite hacer un estudio en profundidad de manera asequible y con las ventajas ya explicadas desde el punto de vista didáctico y práctico.

En la figura 9.1 se muestra el resultado del seguimiento del movimiento de una pelota (en intervalos de 0,033 s) que cae bajo la acción de la fuerza gravitatoria, a partir del video de este movimiento insertado en el “ambiente” del software utilizado para las mediciones y análisis de los datos experimentales.



Figura 9.1

En la figura 9.2 se presenta la gráfica experimental del movimiento en el intervalo considerado y la curva teórica ajustada que mejor describe el comportamiento de los datos experimentales, así como la ecuación correspondiente. Nótese la buena coincidencia con la teoría y en particular el valor que se obtiene para la aceleración de la gravedad ($9,8 \text{ m/s}^2$).

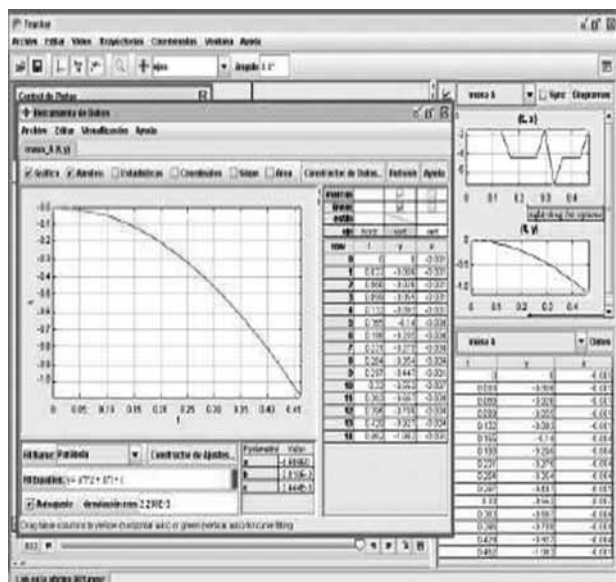


Figura 9.2

Ejemplo 2: investigación de las características del movimiento de un atleta al saltar desde un trampolín mediante análisis de videos.

Este ejemplo permite apreciar las amplias posibilidades de este proceder para el estudio, con facilidad, rapidez y rigor del movimiento de los cuerpos en las más variadas y complejas situaciones reales, tales como, por solo mencionar algunos casos: el movimiento en medios viscosos y los choques bidimensionales o entre varios cuerpos.

La figura 9.3 proporciona una idea del estudio realizado, determinando las posiciones de un punto seleccionado del cuerpo del atleta, en este caso, cada $0,033\text{s}$.

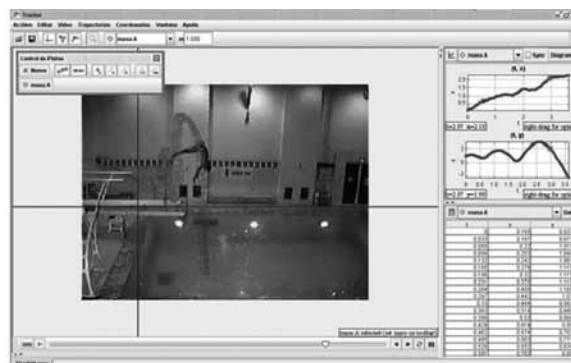


Figura 9.3

A partir de este estudio se pueden procesar los datos obtenidos (ver Fig. 9.4)

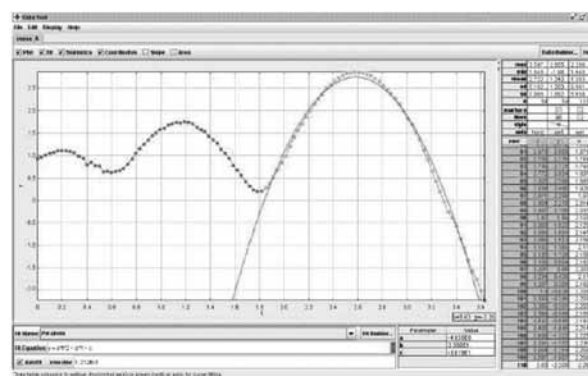


Figura 9.4

En esta figura se destaca en particular cómo en la última fase del salto, el movimiento del atleta se puede describir con bastante aproximación a partir del modelo del movimiento de una partícula.

Además de la riqueza conceptual de la interpretación de este hecho, también resulta muy interesante y útil la determinación de la velocidad inicial y de la energía en el momento del “despegue” del atleta; su cantidad de movimiento lineal y la precisión de cualquier otra magnitud que se requiera, tanto en coordenadas cartesianas como polares. Si bien estos análisis pueden ser realizados sin salir del software utilizado, también es posible exportar los datos experimentales al asistente matemático que se considere más apropiado.

Ejemplo 3: determinación de la frecuencia de un diapasón mediante la utilización de *VIRTINS Multi-Instrument*.

Para medir la frecuencia se emplea un micrófono conectado a la entrada “MIC” de la computadora y dispuesto en el interior del diapasón con el propósito de obtener la intensidad de las ondas sonoras generadas. En la figura 9.5 se muestra la instalación experimental.



Figura 9.5

Para el estudio de las ondas se utilizaron el osciloscopio, el analizador de espectros y el multímetro digital como contador de frecuencia. La forma de la señal obtenida con el micrófono se observa en el gráfico superior de la imagen (osciloscopio), el gráfico inferior de la imagen muestra el espectro de frecuencias en el interior del cajón de resonancia, y el multímetro digital indica el valor de la frecuencia correspondiente a las oscilaciones del diapasón, según se observa en la figura 9.6.

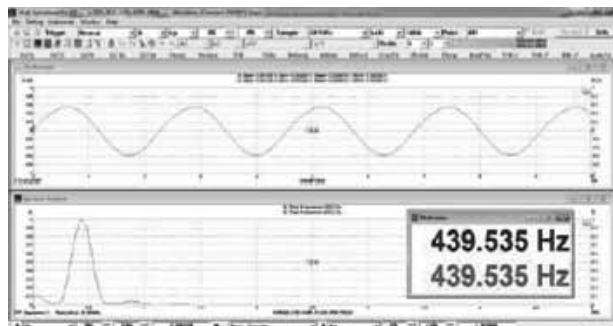


Figura 9.6

Ejemplo 4: estudio de la polarización de la luz y comprobación de la Ley de Malus mediante la utilización de *VIRTINS Multi-Instrument*

En muchos casos las instalaciones experimentales poseen un arreglo de dispositivos y equipos que desvían la atención del fenómeno objeto de estudio. El uso de instrumentos virtuales en la computadora permite disminuir considerablemente la complejidad del proceso de medición. Para el estudio del fenómeno de la polarización se utiliza un sensor de luz (fotodiodo), dispuesto en este caso para medir la intensidad de la luz después de atravesar los polaroides (Figura 9.7).



Figura 9.7

El proceso de medición se efectúa girando el plano de polarización de uno de los polaroides y registrando los valores de la intensidad de la luz en el fotodiodo, que se traducen en valores de tensión procesados por la tarjeta de sonido de la computadora y se muestran mediante el multímetro digital.

La comprobación de la Ley de Malus se realiza a partir del estudio de la dependencia de los valores de intensidad de la luz obtenidos en el fotodiodo en función del ángulo relativo del plano de polarización entre ambos polaroides.

Ejemplo 5: utilización del sistema de exploración digital inteligente (IDES) para la comprobación experimental de la Ley de Boyle-Mariotte.

En el estudio de determinados fenómenos es necesario disponer de instrumentos y equipos que posean un alto nivel de precisión y exactitud en las magnitudes que se investigan en el experimento. La utilización de la computadora como instrumento de

medición para la adquisición de datos experimentales mediante interfaces y sensores contribuye a la automatización del proceso de medición, se eleva ostensiblemente la calidad y la fiabilidad de las mediciones que se realizan pues disminuye considerablemente la propagación de errores.

Para la obtención y el procesamiento de los datos experimentales se utilizó IDES, un sistema de manufactura China que consta de un set de dispositivos o sensores para la medición de diferentes magnitudes como presión, temperatura, desplazamiento, fuerza, intensidad de la corriente, tensión e intensidad sonora, entre otros.

En la figura 9.8 se muestra la “sencilla” instalación experimental utilizada para el estudio de la ley de Boyle-Mariotte, en ella se observa el sensor de presión que se conecta directamente al puerto USB de la computadora.



Figura 9.8

El sistema IDES consta además de un software o plataforma que se encarga del control de los diferentes sensores, permite la visualización en tiempo real de las magnitudes de cada sensor conectado y su almacenamiento para el posterior procesamiento y análisis.

El proceso de medición consiste en obtener los valores de presión correspondientes a los valores de volumen fijados en la jeringa. IDES también dispone de una hoja de cálculo para la tabulación de los datos experimentales y para la representación de gráficos.

En la figura 9.9 se observa el gráfico de P vs t (en tiempo real) del sensor de presión, los datos obtenidos de las mediciones y el gráfico de la dependencia de la presión con el volumen, la herramienta permite también realizar el ajuste correspondiente y presentar la

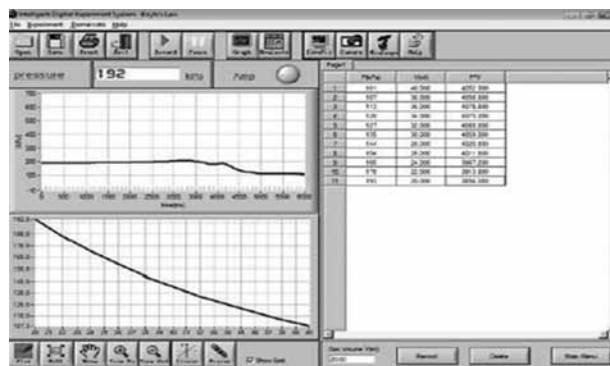


Figura 9.9

Si se desea realizar un análisis más profundo, IDES posee una opción para exportar los datos directamente a una hoja de cálculo de Microsoft Excel o analizarlos en otro asistente matemático.

Ejemplo 6: determinación experimental del coeficiente de rozamiento estático máximo entre dos superficies.

Puede que este sea uno de los casos más conocidos de una típica tarea experimental que se puede hacer con muy pocos recursos, pues solo se requiere de un arreglo experimental donde un cuerpo se puede deslizar sobre un plano inclinado a partir de determinado ángulo de inclinación y medir con una simple regla la base del plano y la altura del mismo, en el momento del deslizamiento inminente (Fig. 9.10)

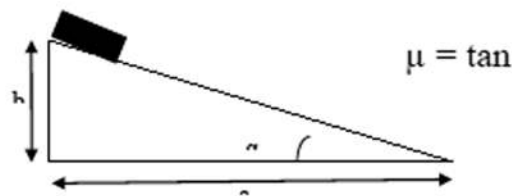


Figura 9.10.

Ejemplo 7: determinación del coeficiente de rozamiento estático máximo entre una superficie plana y un cuerpo esférico

Este es un interesante y complejo problema cuya solución práctica, al igual que en el ejemplo 6) solo requiere medir longitudes con una regla (Fig. 9.11) para calcular la tangente del ángulo α , justo en el momento en que el cuerpo comience a deslizar bajo la acción de la fuerza aplicada en la forma indicada por las flechas gruesas (puede ser con los dedos) y

con ese valor calcular el coeficiente de rozamiento estático máximo.

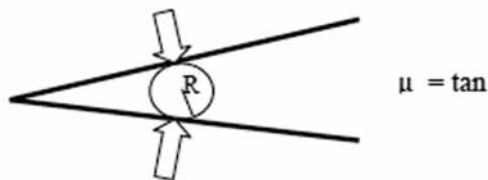


Figura 9.11

Ejemplo 8: el vuelo del capacillo (segundo problema experimental de la VIII Olimpiada Iberoamericana de Física, celebrada en Cuba en el año 2003).

La fuerza de resistencia que sufre un cuerpo al moverse en el seno de un fluido está dirigida naturalmente en sentido contrario al movimiento y depende de la velocidad del cuerpo. Un modelo para esta dependencia es

$$F_r = c v^\gamma$$

donde c y γ son constantes que dependen de la forma del cuerpo y de la naturaleza del fluido.

En nuestro caso específico, estudiaremos la caída en el aire de uno o varios capacillos de papel superpuestos, dejándolos caer de modo que la parte abierta quede hacia arriba (o sea, a la inversa de como cae un paracaídas). *En este experimento, la velocidad es aproximadamente constante durante toda la caída siempre que ésta dure más de un segundo.*

Determine experimentalmente el exponente definido según la expresión anterior. Para ello usted dispondrá en su puesto de trabajo de:

- Ø 3 capacillos de igual masa
- Ø un cronómetro
- Ø cinta adhesiva para referencia de altura
- Ø papel milimetrado y papel log-log

Como se puede apreciar esta es una ingeniosa y “seria” tarea experimental que para su ejecución solo requiere utilizar un cronómetro durante un breve periodo de tiempo (durante el que se ejecutan las mediciones), de manera que se podría hacer

simultáneamente por varios equipos de trabajo sin que necesariamente todos dispongan de este instrumento.

Como solo se puede medir el tiempo, para determinar experimentalmente el exponente hay que llegar a la ecuación

$$\lg(Z^2) = -\frac{1}{\gamma} \lg(\mu) - \frac{1}{\gamma} \lg\left(\frac{mg}{c}\right) + \lg H$$

donde Z es el número de moldes insertados uno dentro de otro, es el tiempo que demora en caer el paquete de moldes, es la masa de cada uno de ellos, considerados iguales entre sí y H es la altura desde la que se dejan caer.

Ejemplo 9: determinación de la longitud de onda de una radiación luminosa monocromática.

Esta es una de las tareas experimentales proyectadas en los trabajos de laboratorio del curso PSSC con la que se obtiene un resultado aceptable para el cálculo de la longitud de onda de una radiación monocromática. El experimento se realiza sobre la base del fenómeno de la interferencia en una doble abertura usando como fuente de luz una bombilla incandescente, preferentemente de filamento recto, y como filtro, papel celofán o un trozo de plástico de algún color. La doble abertura se construye rayando la superficie de un portaobjetos o lámina de vidrio previamente pintada de negro, con dos cuchillas de afeitar pegadas una junto a la otra.

La descripción detallada de esta actividad se puede consultar en el manual de laboratorio del curso PSSC.

Conclusiones

La discusión de las ideas presentadas en este trabajo en la comisión nacional de la carrera para la formación de profesores de Matemática y Física, en cursos talleres nacionales con la participación de profesores de las quince Universidades cubanas de Ciencias Pedagógicas y del nivel preuniversitario, en cursos talleres internacionales, así como la implementación preliminar de las mismas con estudiantes de la carrera y preuniversitario, han puesto de manifiesto su carácter viable, pertinencia y efectividad.

Por otra parte, la propia esencia de estas herramientas propicia el desarrollo de las actividades experimentales como parte intrínseca del curso de Física, la implementación del proceso de enseñanza

aprendizaje con un enfoque problematizado y que no se genere una visión distorsionada y empobrecida de la ciencia y de la actividad científica.

Referencias

Brown D., (2009). Tracker 2.54. www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker

Furió, C, Payá, J., Valdés, P., (2008). ¿Cuál es el papel del trabajo experimental en la educación científica?. En *¿Cómo promover el interés por la cultura científica? Una propuesta didáctica fundamentada para la educación científica de jóvenes de 15 a 18 años* (Capítulo 4) (OREALC/UNESCO-Santiago).

Gil-Pérez, D., Carrascosa, J., Furió, C. Y Mtnes-Torregrosa, J. (1991). *La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria*. Barcelona: Horsori.

Lastra, M., Barroso, R., Sifredo, C. (2012). De los problemas de Física de lápiz y papel a los experimentos informatizados. <http://tiberio.uh.cu>

Sifredo, C., (2010). El análisis de videos como herramienta para la modernización de las actividades experimentales en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Física. En *Didácticas de las Ciencias, Nuevas Perspectivas*. Tercera Parte. Órgano editor EDUCACIÓN CUBANA

Valdés P., Sifredo C., (2008). *Educación científica y tecnologías de la información y las comunicaciones*. Órgano editor EDUCACIÓN CUBANA.

Las representaciones estadísticas en el contexto escolar

Rubén Darío Corrales Velasco¹

Yenny Cifuentes Bocanegra²

Jenny María Ortiz Cáceres³

Resumen. Este artículo presenta algunos aciertos y dificultades que se observaron en un grupo de estudiantes de grado cuarto de primaria al leer e interpretar tablas y gráficos de frecuencias en diferentes contextos. La metodología del presente estudio se basó en el Enfoque Ontosemiótico propuesto por Juan D. Godino. En él, se describen y se explican los fenómenos de la cognición matemática a partir de un modelo didáctico sistemático conformado por seis entidades primarias, que le otorgan a la resolución de problemas, al lenguaje y al sistema conceptual un lugar privilegiado en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Palabras clave. Conflicto semiótico, elementos estructurales, tablas de frecuencias, gráficos de barras, Enfoque Ontosemiótico (EOS).

Abstract. This article presents some successes and difficulties that were observed in a group of students of fourth degree of primary on having read and to interpret tables and graphs of frequencies in different contexts. The methodology of the present study was based on the Ontosemiotic Approach proposed by Godino. Inside It's described and is explained the phenomena of the mathematical cognition from a didactic systematic model shaped by six primary entities, which give to the resolution of problems, to the language and to the conceptual system a favoured place in the process of education learning.

Key Word. Semiótíc Conflict, structural elements, tables of frequencies, bar graphs, Ontosemiótico Approach (EOS).

I. Introducción

El auge de la aplicación de la estadística en diversas disciplinas, la inclusión de la misma en los planes de estudio de las instituciones escolares y la vinculación de ésta en los medios de comunicación, despierta

una necesidad de formar en los niños y jóvenes una postura crítica que permita la toma de decisiones asertivas. Para ello, se precisa formar en los estudiantes la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos, la utilización de un lenguaje propio y la concepción de la estadística como algo más que el tratamiento de un sistema de datos cuantitativos.

En relación con lo anterior, Watson (2006, citado por Arteaga, 2011) propone que una persona estadísticamente culta debe presentar los siguientes niveles:

- El desarrollo del conocimiento básico de los conceptos estadísticos y probabilísticos.
- La comprensión de los razonamientos y argumentos estadísticos cuando se presentan dentro de un contexto más amplio de algún informe en los medios de comunicación o en el trabajo.
- Una actitud crítica que se asume al cuestionar argumentos que estén basados en evidencia estadística.

II. Metodología

Godino (2003), presenta un modelo basado en lo ontológico, lo semiótico y lo epistemológico que describe y explica los fenómenos de cognición matemática y su desarrollo en el contexto educativo. Dicho enfoque recibe el nombre de Enfoque Ontosemiótico (EOS), esta teoría aporta a la didáctica de las matemáticas el análisis de las actividades que se realizan en un contexto escolar. Para ello describe seis entidades primarias relacionadas con la función semiótica que permitirá caracterizar los significados tanto personales como institucionales y la comprensión del objeto matemático. Las seis entidades primarias que describe Godino son:

¹ Estadístico. Especialista en Administración. Profesor. Área de Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle, Cali rudacovesx@yahoo.com

² Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Universidad del Valle, Cali. yenni.cifuentes@correounivalle.edu.co, yenny2815@hotmail.com

³ Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, Universidad del Valle, Cali. jenny.ortiz.caceres@correounivalle.edu.co, jenymaortiz@gmail.com

1. **Situación – problema:** esta teoría concibe que las prácticas matemáticas conllevan a la resolución de un problema.
2. **Lenguaje matemático:** son todas las representaciones que el sujeto utiliza durante la actividad matemática (tablas, gráficos, etiqueta, etc.), a los que Godino llama objetos ostensivos.
3. **Procedimientos:** son todos los algoritmos y acciones que el sujeto realiza al enfrentarse al problema.
4. **Definiciones:** al resolver un problema el sujeto no solo transforma los símbolos, sino que también evoca diferentes conceptos matemáticos (objetos no ostensivos) permitiendo la resolución del problema.

5. **Proposiciones:** el sujeto puede encontrar durante la resolución del problema la relación de un concepto con otro concepto, sus características que le permitirán comprender y aplicar las propiedades.
6. **Argumentos:** no solo basta con resolver el problema sino que se debe generalizar, explicar y validarla su solución.

Teniendo en cuenta las seis entidades primarias que propone Godino, para el análisis de la actividad matemática, a continuación se relacionan las mismas con el objeto de estudio: lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos en un grupo de estudiantes de cuarto de primaria.

LENGUAJE	
Verbal: frecuencia, tabular, mayoría, total, barras, ejes, cantidad, variable, cardinal de un conjunto, etc. Gráfico: tablas de frecuencia y gráficos de barras que muestren un conjunto de datos organizados. Simbólico: f_i (indica frecuencia absoluta).	
SITUACIONES	CONCEPTOS
• Problemas contextualizados en los que se recolecta, organiza e interpreta un conjunto de datos. • Problemas en los cuales, se interprete y se analicen tablas de frecuencia y gráfico de barras. • Problemas que permitan establecer la relación entre tablas de frecuencia y gráficos de barra y viceversa.	Previos
	• Cardinal de un conjunto. • Conteo. • Proporciones. • Plano cartesiano. • Frecuencia.
	Emergentes
	• Gráficos de barras. • Tablas de frecuencias. • Explicaciones de un fenómeno.
PROCEDIMIENTOS	PROPIEDADES
• Contextualización de los enunciados. • Discriminación de las opciones de valor. • Conteo y tabulación de los datos. • Comparación entre una tabla de frecuencia y un gráfico de barras y viceversa. • Relaciones de orden entre las frecuencias obtenidas.	• Principio de inclusión y exclusión de los elementos de un conjunto que cumplen con cierta característica de entre varias posibles. • Propiedades de conjuntos: pertenencia, determinación y cardinalidad. • Propiedades del plano cartesiano: ejes, coordenadas y escalas. • El tamaño de la muestra es igual a la suma de todas las frecuencias.

ARGUMENTOS

- Verificar en una tabla de frecuencia y en un gráfico de barras si es coherente con una conclusión preestablecida.
- Lectura crítica, reflexiva y propositiva de una tabla de frecuencia y un gráfico de barras.
- Justificación de las interpretaciones y los análisis elaborados.

III. Resultados

En el estudio se presentaron dos momentos, primero la aplicación de un cuestionario y posteriormente una entrevista a dos estudiantes con resultados menos favorables que el resto del grupo. A partir de las interacciones con los estudiantes, se obtienen los siguientes resultados:

El concepto de frecuencia absoluta: teniendo en cuenta que ésta resulta del conteo de un dato en una situación dada, se hace necesario que los estudiantes la puedan visualizar en distintas representaciones. De esta manera, en

un gráfico de barras la altura del rectángulo denota la frecuencia, mientras que en una tabla se observa como número cardinal.

En consecuencia, las frecuencias absolutas de una tabla y de un gráfico de barras pueden ser comparadas para establecer relaciones de orden y posteriormente se utilizarían para interpretaciones acordes con la situación representada. Cabe resaltar, que la apropiación y la comprensión de dicho concepto será necesario para la construcción de los siguientes: como la moda de un sistema de datos y las frecuencias acumuladas y relativas.

Un estudio hecho entre 100 niños de este colegio elegidos al azar sobre el número de estudiantes que practican algún deporte viene dada por la siguiente tabla:

Días	Cantidad de alumnos
Lunes	14
Martes	15
Miércoles	15
Jueves	10
Viernes	15
Sábado	26
Domingo	5

b. El deporte que más practican los estudiantes según la tabla es el fútbol, el Viernes.
 c. Lo más frecuente es que los estudiantes practiquen un deporte el martes, miércoles y viernes.
 d. El sábado es el día que practican deporte más frecuente los estudiantes.
 Si por que es el día que más practican los estudiantes.

Al leer la tabla correspondiente a esta pregunta algunos estudiantes atribuyen a la moda el valor de la misma frecuencia que tienen algunos datos del sistema, sin detenerse a analizar que la moda está relacionada con el dato de mayor frecuencia.

Elementos estructurales de las tablas de frecuencia y gráfico de barras: aunque la mayoría de los estudiantes utilizan en la lectura e interpretación de las tablas de frecuencia y del gráfico de barras, las marcas de referencia, ejes, las escalas, los títulos y los especificadores, al momento de concluir, no

enuncia en sus interpretaciones el contexto que se representa.

Pero cuando realizan la lectura e interpretación de tablas de frecuencias en posición horizontal, se presentan algunas dificultades en la deducción de conclusiones, debido a la ubicación de los títulos y las etiquetas.

De acuerdo a lo anterior, se sugiere acercar con más frecuencia a los estudiantes a este tipo de representación y potenciar la lectura y el análisis de los mismos.

La siguiente tabla registra el número de tareas que deben realizar los estudiantes de un colegio durante 7 semanas.

SEMANAS	Nº 1	Nº 2	Nº 3	Nº 4	Nº 5	Nº 6	Nº 7
TAREAS	10	8	9	17	15	11	7

De acuerdo con la información presentada en la tabla, determina si es verdadero (V) o falso (F) cada enunciado y justifica tu respuesta.

c. En la semana 7 los niños fueron al cine. los niños NO fueron a cine hicieron 7 tareas. (F)

Algunos estudiantes determinan el enunciado como falso lo cual es correcto pero al justificar su respuesta afirman que los niños no fueron al cine porque se quedaron haciendo tareas. Lo que quiere decir que, los niños están haciendo inferencia errada de los datos de la tabla, puesto que ésta no proporciona información acerca de la ocupación del tiempo libre al registrarse pocas tareas.

IV. Conclusiones y recomendaciones

Desde el EOS, la actividad matemática debe propiciarse en un contexto, teniendo presente el desarrollo de las seis entidades primarias, cada una de ellas tiene un valor significativo en la apropiación de un concepto y aporta a la Didáctica de las Matemáticas herramientas para el análisis y el mejoramiento de las prácticas escolares.

Es importante la actitud y la aptitud del maestro durante la planeación, ejecución y evaluación del área de matemáticas, priorizando algunos conceptos de la aritmética (cardinalidad, conteo), de la geometría (plano cartesiano) y de la misma estadística para desarrollar en los estudiantes el pensamiento estocástico. Claro está, que dichos conceptos trabajados de manera significativa (inscritos en un contexto), permiten que la estadística sea aplicada en distintos campos del conocimiento.

En consecuencia, las planeaciones de las asignaturas del área de matemáticas, deberían ser integradas, pensando en los aportes que realiza cada una y reconociendo la importancia de las mismas durante la formación del pensamiento lógico, a donde propendemos. De esta manera, la clase de estadística adquiere una real existencia en las aula de clase desde los primeros años de escolaridad.

Referencias

- Arteaga, C. J. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores* (Tesis de doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.
- Cifuentes, Y., & Ortiz, J. (2013). *Análisis ontosemiótico de las representaciones estadísticas (tablas de frecuencia y gráficos de barras) enseñadas en la educación básica*. (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Godino, J. (2003) Teoría de las Funciones Semióticas. Granada. Recuperado de <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional (2006) *Estándares básicos de competencias. Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Imprenta Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional (1998) *Lineamientos Curriculares. Matemáticas*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Comensalismo educativo “Formación y Ética”

Freddy Arley Ibarra Becerra¹

El concepto de comensalismo hace referencia a las ventajas y beneficios de los educandos en las aulas, cuando tienen como guías y facilitadores del conocimiento un maestro íntegro, capacitado y constante, que fomente la buena relación maestro-alumno. Ser profesor de matemáticas implica muchas cuestiones deben ser reconsideradas en el momento de los primeros contactos con la labor docente. Encontrarse con modelos tradicionales de la educación, es contradictorio con el concepto que se pretende forjar en la actualidad, en cuanto a que la educación debe estar encaminada a la formación de personas autónomas y críticas.

Las matemáticas en sí mismas son la herramienta para construir el conocimiento, esto es por la forma en que ellas están constituidas, diría que todo el conocimiento matemático puede y además debe ser construido por los individuos. Esta es la esencia de esta área del conocimiento que me llamó la atención en un primer momento por su aplicabilidad en la solución de problemas de la vida cotidiana, de ahí la importancia de ser un buen educador.

Introducción

Desde hace algún tiempo he considerado que la educación debe estar encaminada a la formación de personas autónomas y críticas; la reflexión ahora se hace más profunda debido a que me doy cuenta de la importancia de una formación responsable, pues seremos quienes nos desempeñemos en las aulas y haremos parte del desarrollo y la educación de los individuos. De esta manera se considera la necesidad de una formación humanística más amplia, pues quienes tendremos la difícil tarea de educar, debemos ser conscientes de los problemas que aquejan a nuestra sociedad, y hacer de las instituciones los espacios o ambientes propicios para la educación de calidad que mejore el mundo de niños y niñas y de la ciudadanía en general.

La ética debe de ser parte de la vocación del maestro, el quehacer ético se sustenta sobre dos pilares, sin los cuales yerra su objetivo: *el interés moral y la fe en la misión de la filosofía*. El ético vocacionado es el hombre al que verdaderamente preocupa el bien de los hombres concretos y que confía en que la reflexión filosófica puede contribuir esencialmente a conseguirlo. Sin un vivo interés por los hombres y sin fe en el quehacer filosófico, el ético profesional es cualquier cosa menos un ético vocacionado y abandona sin escrúpulo la misión que solo la ética está encomendada. (Adela Cortina)

El ser docente nos indica la posibilidad de crear, tolerar, y difundir un ser lleno de virtudes y capacidades que está expuesto a la construcción de ideas, pensamientos, opiniones y críticas constructivas que conlleven a un ser idóneo, capaz de mostrar resultados ante la comunidad, con valores éticos y morales, demostrando niveles de responsabilidad e idealismo.

Formación

El maestro debe ser ejemplo de civismo e ilustración, debe crear condiciones pedagógicas y sociales para que la formación se haga de una forma óptima, por eso primero se debe instruir a conciencia valores y principios, con ello se afianza la seguridad personal, elevan su autoestima, motiva a quererse a sí mismo; acrecientan su nivel de solidaridad y de compromiso, de aprender a convivir, de ser responsable y dedicar su vida a servir, a ayudar a la humanidad. Lo fundamental es tomar conciencia de la educación en valores, es despertar en los alumnos la capacidad para comprenderse a sí mismos, mediante el amor propio y el servicio a los demás.

Para ser docente desde las aulas se requiere replantear el objetivo fundamental de la educación, ya que no sólo es producir matemáticos, técnicos, ingenieros

¹Licenciado en Matemáticas, Universidad del Tolima

o buscadores de empleos, sino que se debe educar personas íntegras que nunca vayan a actuar en contra de los principios de honestidad y sinceridad; esto se puede lograr desde el aula mostrando un buen uso de los algoritmos matemáticos, que las sumas y restas no se conviertan en desfalcos, que si alguna vez llegan a un puesto público y ven la posibilidad de enriquecer sus bolsillos con dineros ilícitos, no lo hagan. Que sepan que ser honesto, es tener muchas oportunidades para robar y no hacerlo.

Se es maestro cuando se orienta, cuando se conduce, cuando con amor se acompaña; cuando se comprende al otro y se ayuda a que esté en el camino que es. Ese camino que ya el maestro caminó. El maestro entiende que se le debe esperar.

Es maestro, el que logra que sus dirigidos comprendan sus orientaciones, las hagan suyas, las modifiquen de acuerdo a sus propios pensamientos y sensaciones; entonces serán capaces de llegar por si mismos a la meta anhelada por él. (Fernando Eugenio Rentería Garzón).

Pienso que el objetivo fundamental en la ocupación docente, es enseñar a los alumnos a realizar su vida, en la que hagan con amor lo que les guste y donde ayuden a la humanidad. Lo más importante debe ser el servicio a la sociedad con lo que practican y si lo hacen bien, seguramente el dinero, la fama y la popularidad los acompañarán.

No obstante podemos sumergirnos en el método socrático “mayéutica” en el sentido que nos lo plantea el señor Víctor Guedez: “El ser humano aprende en la medida en que participa en el descubrimiento y las invenciones. Debe tener libertad para opinar, para equivocarse, para rectificarse, para ensayar métodos y caminos, para explorar. Podemos conectar este método con el pensamiento de Platón donde se nos plantea que hay que dejar al estudiante “pensar por sí mismo”.

Esto es lo que se debería aplicar en el aula que por lo general se evidencia es un fatalismo educativo en donde se restringe al estudiante, y se le enseña algoritmos es decir la aplicación y no la forma en que se descubrieron, su desarrollo mental va a estar en déficit porque se va a dedicar solo a seguir procesos y no a crearlos. Las intenciones de los jóvenes se dejarán a la deriva.

Ética

Yo como docente tengo la responsabilidad de enseñar a mis alumnos a ser rectos, a sentir, pensar, y a actuar coherentemente, en todos los momentos de su vida. Que sean justos y responsables, cumplidores de su deber, disciplinados, que aprendan a convivir mediante el respeto, con mucho entusiasmo y lo más importante, enseñarles a soñar y a convertir sus sueños en realidad. Que tengan una visión del futuro positiva y clara.

El educador matemático no debe estar alejado de la ética; esta nos muestra el ideal de la conducta humana, esta se gesta desde la formación del mismo, por ello el docente debe actuar en esta etapa, y para realizar esta labor tiene que conocer de ética y cómo debe ser su comportamiento como docente.

En esta medida el educador en la clase, debe ser la persona más creativa e ingeniosa, sin estas dos cualidades el interés por esta ciencia se perderá. Esto conllevará a que los estudiantes se aventuren en el mundo abstracto de las matemáticas lo que permitirá ganar un provecho por esta sabiduría.

Basados en nuestras pocas experiencias y los artículos consultados, es evidente que la enseñanza de las matemáticas es una tarea difícil, estamos supeditados constantemente al cambio en cuanto a sus contenidos y a su concepción, debemos convertimos en maestros con una alta capacidad de adaptación para brindar una educación más sana y eficaz.

Nuestro mundo requiere ciudadanía que tenga la capacidad para comprender críticamente, razonar éticamente, sentir moralmente, elaborar criterios personales de forma autónoma y actuar de acuerdo con ellos en el marco de un modelo de aprendizaje ético que procure la transformación de nuestro entorno para el logro de mayores niveles de felicidad, libertad y equidad. (Guillermo Hoyos Vásquez).

Todos estos argumentos son factores que promueven una necesidad de ilustración en las aulas de clase, ya que es en este medio donde podemos elaborar las ideas, las proposiciones y los argumentos que se ofrecen a propósito de algo para llegar a cierta conclusión o juicio; en esta medida las matemáticas

nos ayudan a razonar, por eso la importancia de no quedarse en posiciones ancladas en lo que uno estima como más valioso, hay que pensar y actuar de acuerdo a una forma global, en donde se permita al individuo a intervenir e incidir conscientemente en el destino de la sociedad en que vive.

Tenemos que reflexionar, lograr una reelaboración sistémica de un proceso u objeto que posibilite la orientación del sujeto en su relación con él mismo o con la realidad que lo circunda. Es poner todos los procesos del pensamiento en función de la comprensión de un fenómeno o hecho dado. (Giuvanni Villalón) Nos debe llevar a un cambio en la metodología empleada teniendo claro y como objetivo la libertad de pensamiento en el salón de clase.

Conclusiones

Finalmente, es importante anotar que: para que el proceso de enseñanza se lleve a cabo de una forma exitosa, no basta que el profesor tenga una buena preparación académica, también es necesario que la comunicación sea competente y tener en cuenta eso que se llama vocación, el ser educador está en nuestros genes; ellos contienen la información necesaria para ser maestros, por eso el ser un maestro se lleva en la sangre, es ese amor por enseñar, por querer aprender cada día más, la satisfacción de darse a entender, el ser mediador, el reconocer los errores y reconocer

cuando algo se desconoce y tener esa motivación para investigar y ampliar el conocimiento.

El estudio de las matemáticas es importante fomentar, considero que en él se encuentran los métodos para la construcción de una sociedad con individuos autónomos, con capacidad de debate, que fundamenten sus conocimientos (por lo menos matemáticos) en las definiciones y los axiomas que son mucho más exactos que los mismos docentes.

Todo maestro independientemente del área de conocimiento, debe tener una formación inicial y permanente, hay que resaltar algo que en nuestra sociedad se ha dejado a un lado porque no se le da un verdadero valor y uso, y es la formación humanística que no todo maestro la posee, es decir, es la persona con una manera de ver el mundo basado en el hombre como centro de las preocupaciones, un hombre que investiga, que crea, que cuestiona, sin límites ni restricciones religiosas. Estos defectos del maestro si lo podemos llamar así, es lo que en parte ocasiona la inmensa deserción escolar, la única que puede contrarrestar este defecto es la sabiduría. Ella es una habilidad que se desarrolla con la aplicación de la **inteligencia** en la **experiencia**, obteniendo conclusiones que nos dan un mayor **entendimiento**, que a su vez nos capacitan para **reflexionar**, sacando conclusiones que nos dan discernimiento de la **verdad**, lo **bueno** y lo **malo**.

Referencias

- Cortina, A. (1990). *Ética como filosofía moral*. Madrid: Técnos
- Duque L., J. (2000). *El arte de ser maestro*. Editorial: Duque Linares, Jorge.
- EDUCACION Y CULTURA. Revista del Centro de Estudios e Investigación Docentes de la Federación Colombiana de Educadores.
- Hessen, J. (2007), *Teoría del conocimiento*. Buenos Aires: Losada
- Martínez M., M. (s.f.) *Educación en valores es crear condiciones pedagógicas y sociales* (s.l.): (s.e.)
- Zuleta, E. (1995). *Educación y Democracia. Un campo de combate* (s.l.) Corporación Tercer Milenio.

Construyendo mi entorno. Arquitectura con sketchup una forma de enseñar Geometría

Edgar Alexander Rodríguez Guzmán¹

El objetivo de este artículo es que tanto los docentes como estudiantes, reconozcan el arte como un espacio para analizar, describir y conocer características de diferentes culturas a través de sus creaciones artísticas involucrando la geometría.

El proceso de evolución del hombre se ha visto influenciado por la geometría como parte fundamental en el diseño de obras, esculturas y espacios para mejorar la comodidad del mismo. En este sentido la arquitectura como la ingeniería ha permitido desarrollar herramientas y aplicaciones que mejoran nuestro entorno y satisfacen las necesidades diarias que tenemos.

Arquitectura con sketchup una forma de enseñar Geometría

El entorno construido se relaciona con la historia de un lugar, las culturas y las sociedades que lo crearon, afectado por el tiempo, clima, y topografía, es una visión creativa y una tecnología exacta.

Cuando los estudiantes aprenden a conocer su entorno investigan las interacciones que existen en las comunidades y las civilizaciones desde las perspectivas local y global, y relacionan estos conocimientos con su historia personal; analizan cómo los grandes descubrimientos, las exploraciones, las migraciones influyen en su vida y su comunidad, y cómo la creación artística ha reflejado esos eventos históricos.

Una gran oportunidad que nos da la arquitectura es el aprender en contexto, a desarrollar habilidades, pensamiento espacial, sistemas geométricos que permitirán dar solución a problemas de la vida cotidiana.

En la educación el comenzar a incluir la geometría descriptiva, la arquitectura desde temprana edad

escolar potenciará significativamente el desarrollo del pensamiento espacial, comprendiendo cómo funcionan nuestros espacios, teniendo claridad de conceptos que han mostrado poco interés en los estudiantes como lo son la proporcionalidad, las áreas, volúmenes, etc.

Identificarán la historia, y el diseño de nuestros ancestros, teniendo así apropiación por el espacio donde viven, tendrán claridad de un lenguaje formal desde el punto de vista geométrico, matemático y social.

En la enseñanza de la geometría se han visto falencias en la solución de problemas y en el diseño de objetos donde se pueda experimentar con materiales, formas y técnicas. Dando así la capacidad para trabajar en equipo, para observar, identificar problemas y encontrar soluciones con creatividad.

El uso de las TIC en la educación ha propiciado replantear la forma de pensar en educación, de planear y de enseñar. La educación Colombiana ha demostrado cambios importantes en el avance de la tecnología educativa, el uso de las tecnologías de la información y la comunicación ha permitido que el estudiante explore y formule conjeturas; creando así una cultura en la que los estudiantes jueguen un rol activo en los procesos de investigación y mejoramiento, en el aprendizaje de la geometría. Se pretende así, dar a conocer el software de Google denominado **Sketchup**, junto a sus características principales, como su correspondiente construcción de un objeto geométrico su aplicación en el contexto.

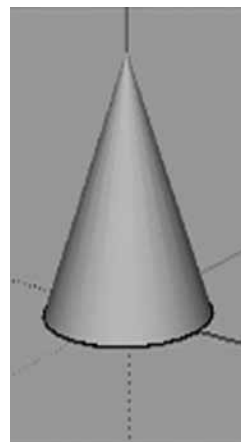
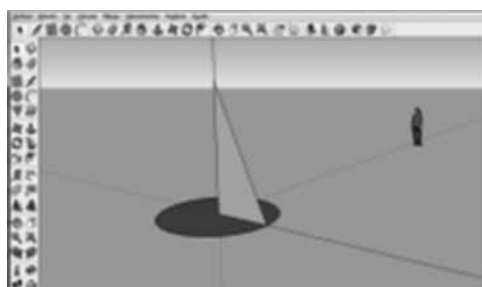
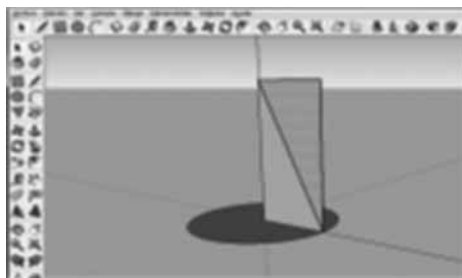
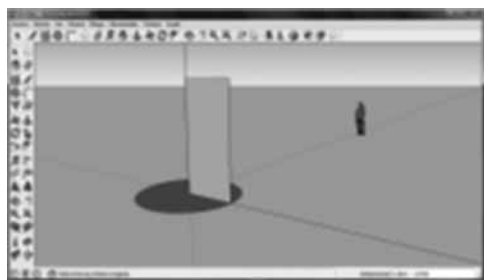
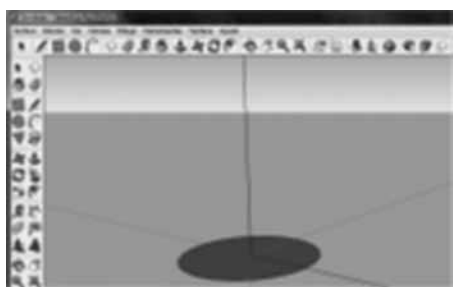
Google Sketchup 8 es un software libre para la educación de fácil manejo que permite realizar proyecciones de un objeto de 2D a 3D, realizar construcciones para áreas como Física, proyectos como realidad aumentada, esto se debe a su gran disponibilidad de extensiones que maneja Google

¹ Docente Gimnasio Campestre, Ibagué, Tolima, earodriguez30@gmail.com

en su página web y que permiten agilizar las construcciones.

La construcción de modelos en 3D pueden ser utilizados para:

- Estudiar figuras y cuerpos geométricos.
- Potenciar la creación y geo-localización de construcciones en diversas regiones geográficas y culturales, mediante la interacción con Google Earth.
- Permitir al estudiante desarrollar su creatividad y sus potencialidades creativas, por medio de la exploración lúdica de entornos 3D.



Se pueden realizar objetos geométricos básicos como sólidos de revolución, sin embargo hacer uso óptimo de las herramientas que ofrece el software y en este sentido se deben buscar construcciones que podamos llevar al contexto para que los estudiantes diseñen soluciones donde construyan y hagan uso de los conceptos trabajados en el aula de clase.

Algunas construcciones que podemos trabajar es un diseño básico de una estructura en nuestra ciudad o nuestro hogar, para ello el estudiante debe realizar un plano de planta el cual permitirá entender el concepto de proporción, escala. Al realizar este paso se puede hacer un levantamiento a 3D donde se involucrará la representación interna de conceptos geométricos, la imaginación como objeto de diseño, usando materiales como pinturas, tejados, piedras, etc.

En nuestro rol docente es fundamental el hacer uso de preguntas generadoras que le permitan a los estudiantes conjeturar y buscar soluciones empleando lo aprendido y trabajado en la aula de clase, ahora bien preguntas como ¿Qué cantidad de material se gastó en el tejado?, ¿Qué costo total tiene realizar un diseño de mi habitación?, ¿Qué diseño es eficiente para conseguir gastos mínimos en la remodelación de mi casa? Estas y otras preguntas generan conjeturas en los estudiantes creando proyectos en los que se pueden plasmar de manera física, como maquetas del diseño creado, simulándolo en Google Earth en un sistema de geo-localización y mostrando un estudio interdisciplinario, donde se involucran la estadística, matemáticas, geometría, artes, ciencias sociales.

El involucrarse en este nuevo proceso significa replantear la forma de enseñar geometría desde un proceso directamente formal, a un proceso donde el

estudiante construirá el concepto desde el diseño, el arte y la imaginación.

Referencias

- Albarrán, L. M., & Eider Antxustegi-Etxarte Aranaga. (4-6 de 10 de 2012). *Construyendo matemáticas con SketchUp de Google mediante mosaicos, fractales y otras construcciones 2D y 3D*. Obtenido de <http://www.ite.educacion.es/es/comunicaciones-congreso-contenidos-educativos-digitales/experiencias/850-construyendo-matematicas-con-sketchup-de-google-mediante-mosaicos-fractales-y-otras-construcciones-2d-y-3d>
- Ariza, F. J. (s.f.). *Informática. Google Sketchup*. Obtenido de TECNOLOGÍAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA: <http://tecnologiainformaticaespiritusanto.wordpress.com/2011/11/20/informatica-google-sketchup/>
- Redlich, P. L. (s.f.). *Sketchy Physics para SketchUp Modelos 3D*. Obtenido de <https://sites.google.com/site/nb8educaciontecnologica/sketchup-modelos-3d>
- Secuencia de aula de Geometría. (2013). En S. S. Educativos.
- Tutorial Sketcup Sketchup Crear, compartir y presentar modelos 3D. (s.f.). En M. d. Educación Tutorial, *3DPlan Integral de Educación Digital Dirección Operativa de Incorporación de Tecnologías (InTec)*. Buenos Aires.
- Rodríguez G., E. A. & Villaraga R., M. E. (22-26 de septiembre de 2008). IV Congreso Iberoamericano de Cabri. Obtenido de Iberocabri 2008: http://www.iberocabri.org/ic2008m/Extensos/PDF/Taller/ENSENANZA_DE_LA_GEOMETRIA.pdf

El uso de las TIC (software libre) para la enseñanza de las matemáticas

Derly Janeth Forero Hernández¹

Resumen. En la actualidad, las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) hacen parte del diario vivir dentro de la sociedad, y más aún en la educación; hoy día los niños viven rodeados de tecnología y si no se aprovecha ésta como una estrategia para la enseñanza de las matemáticas (caso puntual), sería ineficaz en la evolución de la educación, en cuanto a la calidad del aprendizaje se refiere; el software libre es una herramienta, de la cual las instituciones educativas no pueden negarse a darle uso, es una transformación de la pedagogía y la didáctica, es una oportunidad de cambiar las estrategias de enseñanza y actualizarse en un tema global como lo son las TIC.

Summary. Currently, technologies of information and communication (ICT) are part of the daily living within the society, and even more in education; Nowadays children live surrounded by technology and if it is not seized this as a strategy for teaching of Mathematics (case in point), would be ineffective in the evolution of the education, the quality of the learning refers; free software is a tool, which educational institutions not can refuse to give you use, is a transformation of pedagogy and didactics, is an opportunity to change teaching strategies and updating a global subject such as ICT.

Palabras Clave. TIC, Software Libre, Educación Matemática.

Introducción

El siguiente documento presenta un panorama de la necesidad del uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en la educación, principalmente en el área de matemáticas, muchos de los docentes están comenzando a aplicar la tecnología en sus aulas, uno de estos softwares es el Geogebra, una herramienta que ha hecho las clases más dinámicas y ha obtenido en sus estudiantes un

aprendizaje mucho más significativo, no solo existe éste, hay otros programas como winplot, cabri, entre otros, que aportan a sus usuarios una facilidad de conocimiento aún mayor.

Como docentes en matemáticas en las experiencias del aula, se observa cómo la mayoría de estudiantes presentan un gran “desinterés” a todo lo relacionado con esta área y no se logra un aprendizaje significativo en ellos, pero también se observa que, el tema de la tecnología, para ellos es algo atractivo, interesante e innovador, son “nativos digitales”², todo lo que tiene relación con la tecnología es captado de manera fácil para ellos; es por esto que la educación matemática debe estar profundamente ligada a las exigencias que la sociedad hoy día ha impuesto, tema en el que los docentes deben estar continuamente actualizados, es decir la unión de las tecnologías con la enseñanza.

1. Tecnologías de la información y la comunicación (TIC)

Partiendo de una palabra muy común como lo es la *tecnología*, y haciendo referencia desde la Real Academia Española, se define de la siguiente manera: “Conjunto de teorías y de técnicas que permiten el aprovechamiento práctico del conocimiento científico”. Por lo tanto, se debe complementar con la información y la comunicación, como el conjunto de recursos, procedimientos y técnicas usadas en el procesamiento de la información, como también el almacenamiento y la transmisión de éste.

Las TIC permiten el manejo de la información y el desarrollo de la comunicación, actúan sobre la información y generan mayor conocimiento e inteligencia. Pueden abarcar todos los contextos de la vida cotidiana, se pueden observar en todas partes y modifican los ámbitos del diario vivir: puede ser en el trabajo, en las formas de estudiar, en las

¹ Licenciada en Matemáticas, Universidad del Tolima. Ibagué djfh13@hotmail.com

² Se denomina así a aquellos que “nacieron” con las TIC.

modalidades para comprar y vender, en trámites, en el acceso a la salud, y para un caso puntual la enseñanza de las matemáticas.

En el mismo orden de ideas, uno de los empleos de las TIC es en el aprendizaje, es decir, la aplicación de tecnologías multimedia e internet, software libres, entre otros, con el fin de mejorar la calidad del aprendizaje: un aprendizaje significativo, claro está que para lograr esta calidad educativa debe ser totalmente accesible para la comunidad educativa.

2. TIC en la educación, como estrategia de enseñanza de las matemáticas

En cuanto a la educación matemática, se hace necesario dejar una reflexión acerca de la integración de las TIC, que en el ambiente de la educación tiene una estrecha relación con muchas áreas de conocimiento y más aún en el área de las matemáticas, este último que, por ser considerado como una ciencia, debe ser apoyada desde todo punto de vista en lo pedagógico y educativo a través del uso de estos mecanismos, como se ha mencionado anteriormente. Por consiguiente, en la “educación” es común encontrar diversas definiciones, relacionadas con las TIC, siendo ella una “herramienta” útil en la enseñanza de la matemática, por lo tanto, se hace referencia por este medio a algunos especialistas en matemáticas educativa en cuanto a tecnología y educación, que ambas generan un valor de construcción de conocimiento. Autores como: Artigue, 2002; Souhard, 2006 o Haspekian & Artigue, 2007, explican que, *“las tecnologías no son antinomia de conocimiento científico o simple aplicación de este, sino más bien que aquellas constituyen una integralidad de lo pragmático y lo epistémico, es decir que sobre todo en la educación, las TIC poseen un valor de construcción de conocimiento y otro de eficacia a partir de una suerte de trasposición tecnológica adecuada y pertinente.”*

La aplicación de las TIC en la Educación, tiene como fin, la búsqueda de valores para los docentes, como: habilidades en la tecnología, buen desarrollo de metodologías de enseñanza de la matemática, estrategias para la comprensión de ella por parte de los estudiantes, entre otros; como también se busca que, los estudiantes logren la obtención de

habilidades en la tecnología (aunque, actualmente están más actualizados los estudiantes que los propios docentes), sin olvidar en cuanto a la comprensión del contenido de las distintas áreas, la obtención de aprendizaje significativo o un aprendizaje autónomo, estimulando la creatividad, fortalecer en la profundización de conocimientos, fomentando el desarrollo intelectual, generando el interés por el aprendizaje, entre otros.

3. Software libre

Uno de los software más utilizados en la enseñanza de las matemáticas es el Geogebra, es un software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades. Es básicamente un procesador geométrico y un procesador algebraico, es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra y cálculo, por lo que puede ser usado también en física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica y otras disciplinas³.

También encontramos el Winplot; con él se pueden generar gráficos de funciones lineales, cuadráticas, hiperbólicas, exponenciales, geométricas y trigonométricas, aplicadas a distintas áreas de conocimiento: matemáticas, demografía, biología, física, química, etc. Con este programa los alumnos podrán ejercitar con ecuaciones explícitas, paramétricas, implícitas y cilíndricas, generar curvas simples, tubos e incluso representar ecuaciones diferenciales tanto en dos como en tres ejes (2D y 3D). También permite modificar los valores de X, Y y Z en puntos de corte, número de divisiones, etc. y visualizar animaciones con las gráficas. Se pueden realizar cálculos de órbitas planetarias y generar trayectorias para visualizar en la pantalla⁴.

Estos dos, son de los muchos software libres que se pueden encontrar por internet, que permitirá jugar con la tecnología en la enseñanza de las matemáticas.

4. Conclusiones

En la actualidad, es muy importante integrar y usar las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en la educación, y su enseñanza debe ser un trabajo dirigido por docentes conocedores del tema, pues no serviría de mucho poseer este tipo de tecnología si no se aplica de la manera correcta,

³ Obtenido de <http://es.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>

⁴ Obtenido de http://escritoriodecentes.educ.ar/datos/m_winplot.html

ya que las TIC por sí solas no mejoran la calidad educativa, lo verdaderamente relevante de esto, es la metodología de enseñanza, las estrategias por parte del docente, y la manera en que se va a aplicar este tipo de tecnología, y cómo va a ser empleada en el aula.

El reto de los docentes no es innovar tecnológicamente, ni mucho menos innovar pedagógicamente, lo que se busca es que la inclusión

de las tecnologías en la educación sea de la manera correcta en cuanto a su aplicación, será lento, pero se busca que sea significativa para un mejoramiento de calidad en el aprendizaje.

De lo anterior, queda la siguiente pregunta:

¿Cómo se aplican las TIC en el aula para la enseñanza de las matemáticas por parte de los docentes?

Referencias

Geogebra, definición y funcionamiento. Recuperado de <http://es.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>

Real Academia Española: “Definición de Tecnología”. Recuperado de <http://www.rae.es>

Winplot, definición, instalación del Software. Recuperado de http://escritoriocentros.educ.ar/datos/m_winplot.html

Aprendiendo Winplot para la exploración de la ecuación logística

Yury Alejandra Espinosa Flórez¹
Jhon Fredy Saavedra Delgado²

Resumen. En este artículo se presenta la organización del taller titulado “Aprendiendo Winplot para la exploración de la Ecuación Logística”, realizado en el II Encuentro Regional de Educación Matemática y Primer Encuentro Nacional de Programas de Licenciatura en Matemáticas, llevado a cabo en la Universidad del Tolima en el mes de octubre de 2013.

Este taller consistió en conocer la herramienta Winplot como un recurso tecnológico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; además, en lograr un conocimiento básico en el manejo de dicho software y poder construir y manipular algunas representaciones que el programa Winplot nos muestra de un objeto matemático.

Como ejemplo de lo anteriormente dicho, se propuso explorar la ecuación logística de Pierre Verhulst (1804-1849), con el uso del software Winplot; construyendo tres representaciones de la ecuación logística como lo son: el gráfico de puntos, el gráfico de órbitas y tabla de valores. Esto con el fin de lograr percibir las relaciones entre las tres representaciones; también observar cómo dicha ecuación modela la evolución de una población al pasar del tiempo, si la evolución de la población es o no predecible y finalmente lograr percibir algunos indicios de la relación entre el orden y el caos con el cambio de algunos parámetros iniciales de la ecuación logística.

Palabras clave. Ecuación Logística, gráfico de puntos, gráfico de órbitas, tabla de valores, iteración de funciones, registros de representación, TIC, pensamiento matemático, estándares básicos de competencias en matemáticas.

Abstract. This document presents the organization of the workshop titled “learning Winplot for the logistic equation analysis”, performed at the Second Regional Meeting of Mathematics Education and First National Meeting of Programs in Mathematics, made at the University of Tolima this year. This workshop was made with the purpose of know the Winplot tool as a technological resource for teaching and learning of mathematics, also to achieve a basic knowledge in the use of this software to build and manipulate some representations that Winplot program shows of a mathematical object.

As an example of what it has said, it was proposed to explore Pierre Verhulst’s logistic equation (1804-1849), using Winplot software; it consists on build three representations of the logistic equations such as: the dot plot, the graph orbits and table of values. In order to achieve perceived the relationships between the three representations, also to see how this equation models the evolution of a population with the passing of time, prove if the evolution of the population is or not predictable and finally achieve perceived some evidences of the relationship between order and chaos with some initial parameters changes of the logistic equation.

Key words. Logistic Equation, dot plot, graph orbits, table of values, iteration of functions, registers of representation, ICTS, mathematical thinking, basic standards of competence in mathematics.

1.Introducción

Conscientes de los diversos niveles de desarrollo y grados de implementación que se tiene de las TIC en las I.E., (Ley general de educación, 1994), y con el propósito de ser coherentes con la situación actual de cada una de ellas, se presenta el software

¹ Licenciada en Matemáticas. Universidad del Tolima, Ibagué, Tolima. yuryaleja17@gmail.com

² Licenciado en Matemáticas. Universidad del Tolima, Ibagué, Tolima. jfredymatematico@gmail.com

Winplot como una herramienta para el desarrollo del pensamiento lógico y de algunos tipos de pensamiento matemático (M.E.N., 2006).

Igualmente el programa Winplot es un software gratuito el cual disminuye el número de limitantes que usualmente se presentan en las I.E. para el desarrollo de un proyecto de implementación de Medios y Tecnologías de la Información y la Comunicación (MTIC) a los currículos escolares.

Como muestra del uso del software Winplot en la adquisición de conocimiento matemático, entraremos en el campo de la dinámica de poblaciones ya que el crecimiento de una población es un tema que nos interesa a muchos. Para ello, se explorará la ecuación logística planteada por el matemático y biólogo belga Pierre Verhulst (1804-1849) alrededor del año 1845. Esta ecuación logística es un modelo matemático discreto de la evolución de una población. La ecuación es la siguiente:

$$x_{n+1} = f(x_n) = kx_n(1 - x_n)$$

Donde x_n es el porcentaje de la población con relación a la población actual, por ejemplo si $x_n = 0.2$, significa que tenemos el 20% del máximo de la población admitido por nuestro hábitat (es decir que el dominio de x_n es 0 a 1). La constante k es llamada el factor de crecimiento que representa las condiciones ecológicas de la especie, como lo es la cantidad de alimento, los depredadores, la tasa de natalidad, etc.

Construyendo las tres representaciones mencionadas de la ecuación logística con el programa Winplot, se quiere lograr percibir cómo la ecuación a partir de múltiples iteraciones y algunos cambios de valores numéricos, representa la evolución de una población al pasar del tiempo, mostrándonos un ejemplo de la relación entre el orden y el caos, conceptos muy relacionados con la geometría fractal.

2. Referentes Teóricos

Los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, los estándares básicos de competencias en matemáticas y los registros de representación, son los componentes fundamentales de referencia para nuestro trabajo.

³ D'Amore, B. (2009/2011). *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución*. Revista Científica. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá. 11, 150-164. ISSN: 0124-2253.

2.1 Lineamientos y Estándares

Los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 1990), los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN 2012) y los lineamientos de nuevas tecnologías en el currículo de matemáticas (MEN, 2009), han considerado tres elementos curriculares esenciales: contexto, conocimientos básicos y procesos.

El contexto hace referencia a los ambientes que viabilizan de forma significativa los procesos de enseñanza-aprendizaje; este contexto ha permitido crear situaciones problema, y con la incorporación de las TIC, se ha logrado una nueva visión de los objetos matemáticos, promoviendo la construcción de nuevos significados de los objetos matemáticos.

Respecto a los conocimientos básicos que se deben adquirir, se han relacionado los cinco tipos de pensamiento con relación a un sistema matemático de referencia, es decir: el pensamiento numérico con los sistemas numéricos, el pensamiento espacial con los sistemas geométricos, pensamiento métrico con los sistemas de medidas, el pensamiento aleatorio con los sistemas de datos, y el pensamiento variacional con los sistemas algebraicos y analíticos. Con el uso de las TIC, cada sistema matemático puede ser explorado de forma distinta, logrando nuevos significados muy distintos a los ya constituidos históricamente.

Los procesos establecidos por el (MEN 2012), para el área de matemáticas son cinco y estos son: comunicación, resolución y planteo de problemas, modelación, razonamiento, comparación y ejercitación de procedimientos. Hablemos por brevedad de solo tres.

Comunicación: referente a expresar, interpretar y representar expresiones matemáticas.

Razonamiento: referente a justificar estrategias, procedimientos, hacer conjeturas y generalizar.

Resolución y planteo de problemas: referente a formular y solucionar problemas de la vida cotidiana, de las matemáticas y de otras ciencias.

2.2 Registros de representación

Un objeto matemático hace referencia a todo lo que se relaciona cuando se enseña o se aprende matemáticas; pero para poder llegar a una conceptualización de este objeto no es suficiente con el objeto mismo, se necesita conocer sus diferentes representaciones para interiorizar el concepto. “Los significados matemáticos no se deben apoyar en una realidad concreta, por ello el concepto carece de objeto, y en ese caso debe pasar a través de representaciones”, pero no es en sí, que la realidad concreta no posea una representación del objeto, lo que sucede es que esta representación puede que no agote las propiedades del objeto.

Los que comprendemos por representación son las notaciones simbólicas, gráficas o de orden verbal (oral, escrito o gráfico) mediante las cuales se expresan conceptos y procedimientos, así como características y propiedades relevantes de los objetos representados. Ahora, se debe tener en claro que percibimos las representaciones (de un objeto) en registros de representación, que serán comprendidos como el sistema de signos (agrupación de representaciones) que permiten llevar a cabo las funciones de comunicación, tratamiento y objetivación de la construcción de los objetos matemáticos que se analizan en un contexto determinado, además de las transformaciones debidas para acercarse de una mejor manera al concepto y el objeto que lo representa (Duval, 1999).

A continuación se presentan los tipos de representaciones en la comprensión de los objetos matemáticos:

- **Representaciones Externas.** Se denominan externas a las representaciones que son perceptibles a través de los sentidos; por ende las representaciones que presentan los ordenadores se clasifican en externas.
- **Representaciones Internas.** Imágenes mentales de los objetos matemáticos y las relaciones de conocimiento del mismo; puede decirse que son las representaciones de los objetos matemáticos que han sido interiorizadas por los sujetos.

- **Representaciones Ejecutables.** Son las representaciones de los objetos matemáticos que las herramientas computacionales nos permiten manipular, para obtener una mejor comprensión de las propiedades que estos poseen; se conocen como portadoras de potencialidad de acciones cognitivas. Además permiten la conversión entre registros de representación (MEN, 1999).

En palabras de Lupiáñez (2000), son las notaciones simbólicas, gráficas o de orden verbal que expresan conceptos y procedimientos, así como características y propiedades relevantes de los objetos representados virtualmente; estas representaciones son el producto de la simulación de acciones cognitivas del software con independencia del usuario.

En este punto se debe recordar que se habla acerca de las representaciones (plural) de un objeto, y en párrafos anteriores se menciona que el conjunto de dichas representaciones se denomina registros de representación; se hace aclaración en los siguientes conceptos:

- **Registros de Representación Semiótica.** Conjunto de símbolos, formas de comunicación oral y registros gestuales de las inscripciones; en el primer caso palabras o expresiones, en el segundo caso dominio de gráficas, fórmulas y cálculos.
 - **Registros de Representación Noética.** Son los registros de representación que actúan en la adquisición del concepto de la representación semiótica a la cual se le están aplicando las funciones de representación, tratamiento y conversión.
- Pero dentro de los registros de representación semióticos se llevan a cabo los siguientes procesos:
- **Formación de representación en un registro semiótico:** trabaja en función de expresar una representación mental o bien para evocar un objeto real.
 - **Tratamiento:** transforma las representaciones semióticas de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema de modo que se obtengan otras representaciones.

- **Conversión:** cuando la transformación produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial.

Para este proyecto se asume que las herramientas computacionales y las representaciones ejecutables permiten potencializar las características semióticas de los objetos matemáticos, debido a que permiten hacer la representación en un registro externo, el tratamiento de la representación dentro del registro y convertir las representaciones de un registro a otro; lo cual permite una mejor comprensión del objeto matemático desde su percepción como signo, hasta su construcción como concepto.

3. Metodología

Tema de taller: aprendiendo Winplot para la exploración de la ecuación logística.

Duración: 2 horas.

Recursos: sala de sistemas, software Winplot versión compilado 11 agosto de 2012, un computador (para los talleristas), video beam, apuntador laser (opcional), tablero y marcadores.

Temas preliminares: ecuaciones, funciones, álgebra básica e iteración de funciones.

El desarrollo del taller se llevó cabo en tres momentos: introducción al software, construcción de la ecuación logística y conclusiones.

3.1 Introducción al software

El primer objetivo es ver el programa Winplot como herramienta computacional de trabajo en la representación de objetos matemáticos. Para este momento se realizarán pequeños ejercicios en diferentes representaciones: simbólicas y gráficas; para empezar a interactuar y lograr un manejo básico del mismo. Un ejemplo de ello es construir un cuadrado de longitud, con la opción segmento.

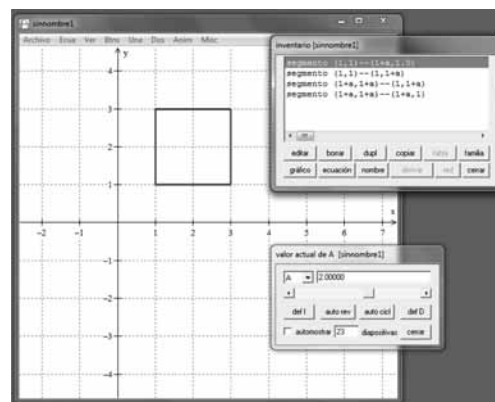


Figura 1. Construcción de un cuadrado de longitud a .

De allí se podrían generar más construcciones, como por ejemplo, un rectángulo de lados a y b o representar un cubo de diferentes longitudes; ya que la potencialidad de Winplot es trabajar con constantes, porque podemos ingresar algunos de los parámetros en una expresión, y con la opción *animación* luego parámetros $a-w$, podemos dar valor a dichos *parámetros*, haciendo que las representaciones de los objetos matemáticos cambien dinámicamente respecto a los parámetros utilizados.

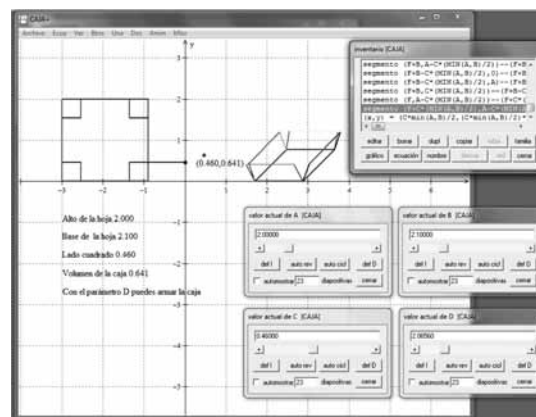


Figura 2. Problema de optimización sobre el volumen de una caja.

3.2 Construcción de la Ecuación Logística

El segundo paso es la construcción de la ecuación logística a partir de tres representaciones con el

programa Winplot los cuales son: el gráfico de puntos, el gráfico de órbitas y tabla de valores; esto con el fin de lograr percibir cómo la ecuación a partir de múltiples iteraciones y algunos cambios de valores numéricos, representa la evolución de una población al pasar del tiempo, que algunas veces con una simple y pequeña variación a las condiciones iniciales, se vuelve impredecible llegando a lo caótico. Recordemos que la ecuación logística es:

$$x_{n+1} = f(x_n) = kx_n(1 - x_n)$$

Durante la interacción con las tres representaciones, se deberán ir indagando las siguientes preguntas:

- ¿Qué pasa con la cantidad poblacional al pasar el tiempo?
- ¿Depende el patrón de crecimiento del factor de crecimiento?
- ¿El patrón de crecimiento es sensible a las condiciones iniciales?

El gráfico de puntos representa la cantidad de la población al pasar el tiempo. Para construir dicha gráfica, se escribe la ecuación como una sucesión recursiva (i.e. $(x, y) \rightarrow (1 + x, k(1 - y))$), en la opción *ecua* luego *recursión*.

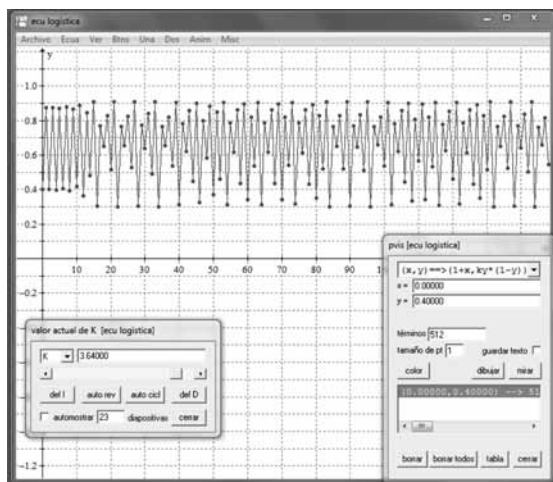


Figura 3. Gráfico de puntos tomando una población inicial del 40% y $k=3,64$.

Observe que con $k=3,64$ la dinámica de la población es impredecible, es decir que no se puede asegurar nada respecto a la evolución de la población al pasar el tiempo, pero si se toma un valor de $k=2,8$ (ver figura 4), la ecuación logística comienza a converger a un valor fijo, implicando que la evolución de la población se estabiliza al pasar el tiempo.

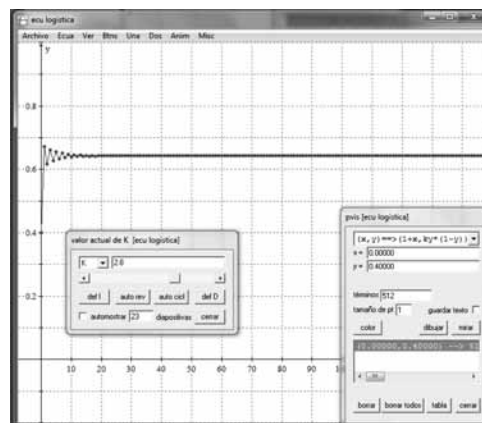


Figura 4. Con $k=2,8$ la población se estabiliza al 64.28%.

El gráfico de órbitas permite observar hacia qué puntos órbita se dirige la evolución de la población al paso del tiempo; por ejemplo en la figura 5 se puede observar que si $k = 2,8$ la evolución de la población tiende a estabilizarse al 64.28% del máximo de la población admitido por nuestro habitat (compáralo con la figura 4).

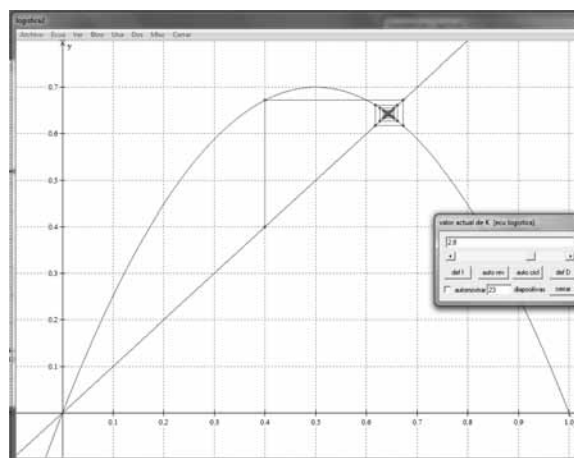


Figura 5. Gráfico de órbitas tomando una población inicial del 40% y $k=2,8$.

Pero no siempre se puede calcular hacia dónde irá a orbitar la evolución de la población al paso del tiempo, por ejemplo si $k=3,64$ la idea no es tan fácil ya que el proceso se vuelve caótico.

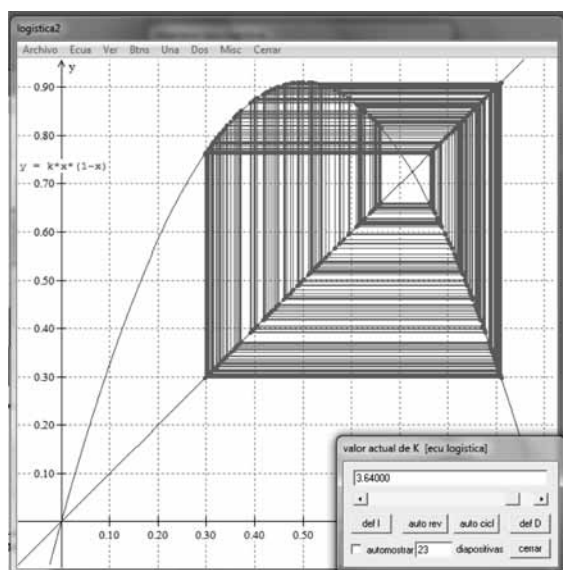


Figura 6. El gráfico de órbitas con $k=3,64$ se vuelve caótico.

Para construir este gráfico de órbitas, se debe escribir la ecuación logística como una función explícita (i.e. $f(x) = kx(1-x)$) y luego utilizar la opción *red* ubicada en la *ventana inventario*.

La **tabla de valores** nos ayuda a mostrar si hay o no convergencia cuando se varía el valor de k entre 0 y 4. Por ejemplo, para valores de $0 \leq k < 1$, la ecuación converge a cero (ver la primera imagen de la figura 7).

Para valores de $1 \leq k < 3$, la ecuación logística converge (ver la segunda imagen de la figura 7), y el valor de convergencia se puede determinar mediante la fórmula:

$$c = \frac{k-1}{k} \quad \text{Donde } c \text{ es el valor de convergencia.}$$

Referencias

D'Amore, B. (2009/2011). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica. Universidad Distrital Francisco José de Caldas*. Bogotá. 11, 150-164. ISSN: 0124-2253.

Finalmente para valores de $3 \leq k$ la ecuación logística no converge (ver la tercera imagen de la figura 7), en algunos intervalos la ecuación oscila entre dos o más valores, pero a mayor sea el valor de k , más impredecible se vuelve la dinámica de la población.

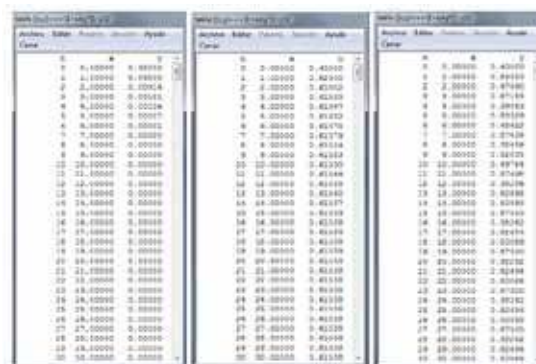


Figura 7. Tabla de valores tomando una población inicial del 40% y $k=0,2$ $k=2,6$ y $k=3,5$.

3.3 Conclusiones

- Dar a conocer el software Winplot como herramienta computacional de trabajo en la representación de objetos matemáticos para la enseñanza de las matemáticas.
- Lograr percibir cómo la ecuación logística a partir de múltiples iteraciones y algunos cambios de valores numéricos, representa la evolución de una población al pasar del tiempo.
- Comprender que no es posible determinar con certeza qué ocurre con el comportamiento de la población al pasar el tiempo, ya que los resultados dependen drásticamente de los valores iniciales, llegando a ser algunas veces impredecibles.

- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.
- Lupiáñez, J. L. (2000). “Nuevos acercamientos a la historia de la matemática a través de la calculadora TI-92”. Memoria de tercer ciclo. Universidad de Granada. Capítulo 4. Representaciones Ejecutables.
- MEN (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas en Colombia*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN (1999). *Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas. Apoyo a los lineamientos curriculares*. Bogotá: Punto EXE Editores.
- MEN (Ed.) (2004). *Tecnología informática: Innovación en el currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media*. Bogotá: MEN.
- MEN (2012). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf [15-05-2012].
- Rubiano, G. (2000). *Fractales para profanos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Rubiano, G. (2009). *Iteraciones fractales (con mathematica®)*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Vergnano, S., Scarafia, F., Rocca C. (2013) Hacer matemática en la sala de informática: uso de Winplot, una propuesta didáctica. Recuperado de <http://conectarigualdadegresadosexactas.files.wordpress.com/2011/09/instructivo-win-plot.pdf> [15-09-2013].
- Vicente, T. (1996). *Fractus, fracta, fractal (fractales, de laberintos y espejos)*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Villarraga, M., Saavedra, F., Espinosa, Y., et. al. (2012). *Acercando al profesorado de matemáticas con las Tic para la enseñanza y aprendizaje*. EdmeTic 1(2).

Aprendizaje de la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 (método gráfico), en grado Noveno, utilizando el graficador Winplot

Mariana Cogua Cubides¹

Las matemáticas han sido enseñadas y aprendidas siguiendo una serie de pasos, algoritmos que el estudiante aplica, sin entender la mayoría de las veces lo que hace, ni porqué lo hace. Cuando al final su resultado es incorrecto, él no sabe en qué, cómo y porqué se equivocó.

El aprendizaje de la solución de sistemas de ecuaciones lineales no ha sido ajena a estos problemas, ya que este proceso se ha vuelto totalmente algorítmico; de ahí la preocupación de crear estrategias que permitan una mejor enseñanza de este tema, pues el estudiante no interpreta la solución que obtiene como la respuesta a una situación dada.

Es por ello, que la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 aparece como tema de estudio en el grado noveno (estudiantes de 14 a 15 años) y reaparece como herramienta en los años siguientes y llega hasta la educación superior. Por esta razón, es de vital importancia que los estudiantes sean capaces de solucionar problemas de la vida cotidiana, que involucren sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

Sin embargo, se observa que los estudiantes no presentan claridad en los conocimientos matemáticos relacionados con sistemas de ecuaciones y tienen muchas dificultades a la hora de resolver problemas que involucran solución de sistemas de ecuaciones 2x2, lo cual los lleva en muchas ocasiones a aprender este proceso de forma algorítmica y no contextualizar los conocimientos en un determinado problema.

Con el fin de identificar estas dificultades, se realizó una prueba diagnóstica a los estudiantes del grado noveno del Colegio los Andes de Ibagué en el año 2009, y con base en los datos obtenidos se diseñan guías de trabajo que tienen como objetivo reforzar cada proceso en el cual los estudiantes presentan falencias.

A la hora de diseñar cada guía de trabajo, teniendo en cuenta que el objetivo principal es dar solución a las dificultades presentadas por los estudiantes a la hora de aprender la solución de sistemas de ecuaciones 2x2 (método gráfico), se utiliza el graficador WINPLOT que facilitará al estudiante la comprensión de los conceptos matemáticos que involucran la solución de un sistemas de ecuaciones lineales.

Como experiencia de aula en el año 2013 se desarrolló una unidad didáctica en un blog <http://metodograficoderesoluciondesistemas.wordpress.com/> donde se ofrece una forma de enseñar la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 por el método gráfico utilizando el software Winplot, así como recursos para vincular de manera significativa el pensamiento matemático con aplicaciones completamente reales y auténticas del contexto. Este blog está dirigido a estudiantes del grado noveno pretendiendo apoyar al estudiante en la conformación de un espacio en el aula para el aprendizaje de las matemáticas con tecnología.

¹ Licenciada en Matemáticas, Universidad del Tolima. Ibagué, Tolima sucymacocu1986@gmail.com



Referencias

- Camargo, L. et al. (1989). La función lineal. 78 -79 p. Solución de sistemas de ecuaciones: Método gráfico. En: *ALFA 9 "Serie de matemáticas para educación básica secundaria y media vocacional"*. Santafé de Bogotá: Norma, S.A.
- CONSTITUCIÓN POLÍTICA COLOMBIANA 1991. Artículo 67 11p. [en línea]. Idioma Español, formato Pdf. Disponible en Internet: <http://www.banrep.gov.co/regimen/resoluciones/cp91.pdf>
- Di Franco, B. y Gentile, C. L. (ESEL) - EQUIVALENCIA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. Universidad Nacional de La Pampa. Tercer Ciclo Ruralizado - Ministerio de Cultura y Educación de La Pampa. Prov. de La Pampa (Argentina) [En línea]. Recuperado de: <http://www.soarem.org.ar/Documentos/31%20Di%20Franco.pdf>
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2003). Estándares básicos de competencias en Matemáticas. [En línea]. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Los anillos digitales

Jorge E. Mendoza Guzmán¹

Resumen. En este artículo se presenta formalmente una definición tomando como base los dígitos de los números enteros con el fin de definir el operador M que denota la suma de los dígitos de los números. El resultado principal de esta definición es obtener unas figuras denominadas *anillos digitales* que son el resultado del cambio de coordenadas cartesianas a polares.

Palabras clave. Números, dígitos, coordenadas polares, interpolación.

Introducción

Históricamente el número en las matemáticas es el resultado de un proceso evolutivo continuo proveniente de las primeras etapas de la civilización. Precisamente entre estas etapas cabe destacar su utilidad en usos prácticos presentes en la astronomía y el cálculo del tiempo. Modernamente la representación del número ha pasado por varias instancias, como una representación primitiva mediante una biyección hasta llegar a una conjuntista. En este trabajo no se pretende hacer énfasis en la epistemología del número, más bien se hará referencia al cómo, a partir del número, es posible definir un operador que permite hallar relaciones entre los dígitos de los números.

El operador M

Definición. La operación M . Sea $x = -x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ un número entero, se define la suma de los dígitos bajo x como:

$$M(x) = M(x_1 x_2 x_3 \dots x_n) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \quad (1)$$

A partir de esta definición se obtiene el siguiente teorema.

Teorema. $M(-x) = -M(x)$

Demostración. Sea $-x = -x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ por definición se tiene que

$$M(-x) = M(-x_1 x_2 x_3 \dots x_n) = -(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = -M(x)$$

$$\text{Luego } M(-x) = -M(x)$$

Este teorema muestra cómo operar números enteros negativos obteniendo una relación mediante parejas ordenadas de la forma $(-x, M(-x)) \equiv (-x, -M(x))$. A partir de la definición anterior es posible graficar las diferentes relaciones³ que se pueden obtener con el operador M

¿Qué es Graph?

Graph es un programa diseñado para representar gráficamente funciones matemáticas en un sistema de coordenadas. Es un programa gratuito!

Entre las distintas herramientas que posee el programa aparece la opción serie de puntos, la cual se define como:

Definición. Introduce una serie de puntos en el sistema coordenado especificando las coordenadas x e y . No hay límite para el número de puntos que desees insertar. Para representar los puntos puedes elegir entre ciertos marcadores, tamaños y colores. Así mismo, es posible expresar gráficamente márgenes de error mediante barras de error. [1]

Con esta opción y la definición suma de dígitos se pueden obtener parejas ordenadas de la forma $(n, M(n))$ las cuales gráficamente se presentan a continuación.



Figura 1: Polígonos digitales

¹Estudiante de Licenciatura en Matemáticas y Física, Universidad del Valle, Cali, Valle Jorge.mendoza@correounivalle.edu.co

²Siendo x_n el enésimo dígito.

³ Justamente estas relaciones se refieren al dominio de mi relación, por ejemplo se puede operar M solo con los números impares, pares, primos, etc. En este sentido obtendría parejas de la forma $(2n+1, M(2n+1))$, $(2n, M(2n))$, $(p, M(p))$ siendo p primo.

Estas figuras se denominan polígonos digitales puesto que son obtenidos mediante los dígitos de los números.

¿Cómo obtener los anillos digitales?

El programa Graph tiene una opción que permite cambiar las coordenadas cartesianas a polares y que conjuntamente se pueden seleccionar el tipo de interpolación (lineal, spline cúbico **1-D**, Spline cúbico **2-D**, coseno 1/2 fase) de esta manera al graficar los polígonos de la figura 1 y al seleccionar la opción coordenadas polares con algún tipo de interpolación se obtienen las siguientes figuras:

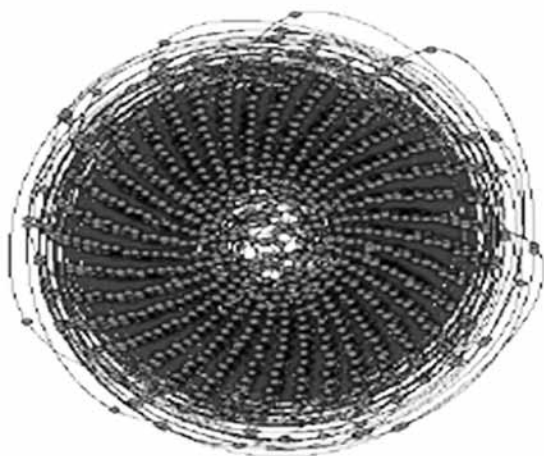


Figura 2. Anillo digital suma de dígitos

A partir de esta figura con algo más que curiosidad se puede explorar la opción interpolación.

La siguiente figura representa algunos números primos calculados mediante M , obteniendo el conjunto de puntos de la forma $(p, M(p))$ siendo p primo



Figura 3. Primos con interpolación lineal

Con una interpolación lineal.

A continuación se presentan variaciones de las interpolaciones para una figura inicial.

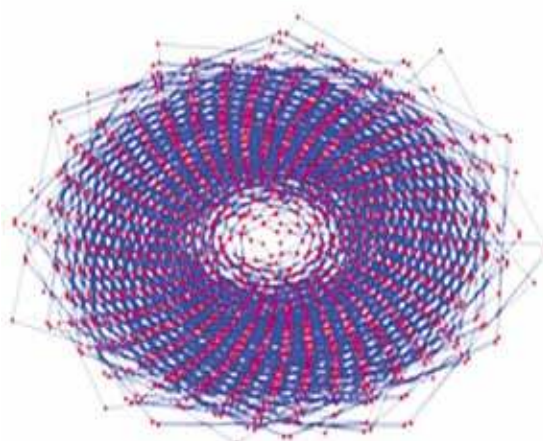


Figura 4. Figura inicial interpolación lineal. Operación M para los números naturales.

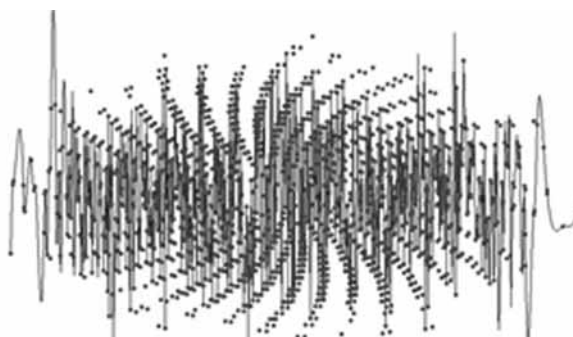


Figura 5: Anillo Spline cúbico

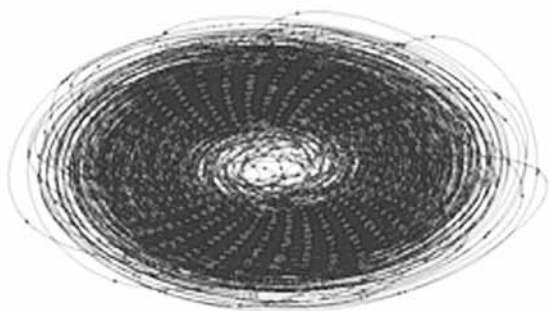


Figura 6. Anillo digital. Spline cúbico 2-D

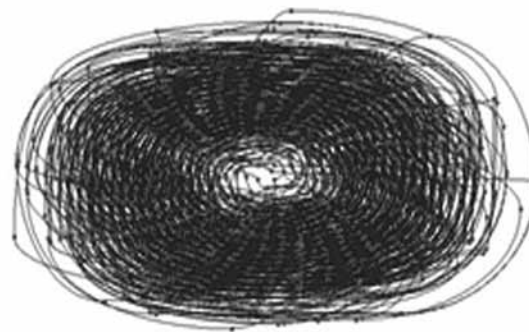


Figura 7. Anillo Coseno 1/2

Conclusiones

A partir de lo anterior se evidencia el cómo definir la operación M suma de dígitos permite obtener resultados que enmarcan y amplían el conocimiento matemático abriendo caminos a nuevas representaciones y hallando nuevos objetos que pueblan el universo matemático.

Referencias

Castillo, C.I. (s.f). Teoría de números. Obtenido de <http://www.uv.es/ivorra/Libros/Numeros.pdf>

Oliver, F. (s.f). Graph. Obtenido de www.padowan.dk/bin/Graphspanish.pdf

Números primos cubanos¹

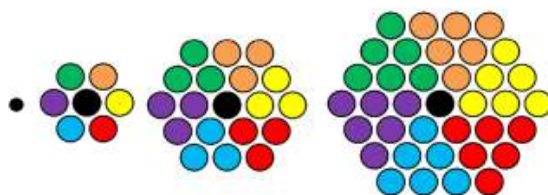
Diana Isabel Quintero Suica²
Ingrith Yadira Álvarez Alfonso³

Una definición conocida de números primos, encontrada en Apóstol (1984), nos dice que un número entero se llama primo si $n > 1$ y si los únicos divisores positivos de n son 1 y n . A pesar de ello, hay conjuntos formados por unos determinados números primos, que además de esta característica, comparten una o más propiedades adicionales. Caso de estos conjuntos de números primos, son los números primos cubanos que presentamos en este trabajo en la modalidad de póster y que son abordados por medio de actividades matemáticas como: visualizar, identificar patrones, conjeturar, verificar conjeturas y generalizar.

En el primer semestre universitario de la Licenciatura en Matemáticas en el año 2013, se presenta a los estudiantes de la asignatura Modelos Pedagógicos, un taller que contiene una secuencia de tareas orientada a un objetivo específico: caracterizar la forma de los números primos cubanos. Este objetivo se desarrollaba por medio de la puesta en acción de actividades que se utilizan en el proceso de inducir, a saber: visualizar, identificar patrones, conjeturar, verificar conjeturas y generalizar⁴. Dicha caracterización, además, permitía identificar las relaciones que existen entre los números triangulares y este tipo especial de números primos.

Se presenta una tarea general y las tareas que contribuyen al objetivo general de la actividad. La tarea principal se describe así:

Teniendo en cuenta la secuencia, determinar el número de puntos necesarios para armar un hexágono regular en la posición $n - P_n$ -



Las actividades que se proponen después de establecer la tarea general son las siguientes:

	Gráfico	Tarea	Visualización
Paso 1		Observa el inicio de la secuencia. Un punto.	Se observa un punto de color negro en el centro. No hay puntos de otros colores
Paso 2		Construye el siguiente hexágono regular utilizando seis puntos más, para rodear el punto negro del paso anterior	Los puntos adicionales son de diferente color. Si se unen dichos puntos por medio de segmentos, se forman los lados de un hexágono regular.

¹ Este artículo corresponde al trabajo presentado en el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática CIBEM realizado entre los días 16 y 20 de septiembre de 2013, en Montevideo, Uruguay

² Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C. dma_dquintero472@pedagogica.edu.co

³ Profesora Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C ialvarez@pedagogica.edu.co

⁴ Detalladas en el documento inédito Actividades matemáticas: conjeturar y argumentar

Paso 3		Imagina construir el siguiente hexágono regular a partir del anterior, agregando doce puntos más.	Cada lado del “nuevo” hexágono tiene un punto más que el lado del anterior hexágono. Por cada color se está formando un triángulo.
---------------	---	---	--

Posterior a la actividad de visualización se propone la *Tarea A*, que busca que los estudiantes identifiquen patrones, conjeturen y validen su conjetura.

Tarea A. Determinar cuántos puntos más necesitas para construir el hexágono regular de la siguiente posición
- P_n -

	Actividad Matemática	Registros
Paso 1	Identificar Patrones	P_a : Puntos adicionales $P_{a1} = 0, P_{a2} = 6, P_{a3} = 12$
	Escribe el Patrón	El número de puntos que se agrega es múltiplo de 6.
Paso 2	Conjetura	En la posición n debe agregarse $6 * (n - 1)$ puntos.
Paso 3	Verifica la Conjetura	$P_{a_n} = 6 * (n - 1)$ $P_{a1} = 6 * (1 - 1) = 0$ $P_2 = 6 * (2 - 1) = 6$ $P_{a3} = 6 * (3 - 1) = 12$ $P_{a4} = 6 * (4 - 1) = 18$

Seguido a esto, se plantea la *Tarea B*, que busca realizar nuevamente una conjetura pero no sobre el número de puntos adicionales requeridos, sino sobre el número total de puntos necesarios para construir un determinado hexágono.

Tarea B. Establece cuántos puntos necesitarías en total para armar el hexágono regular de la posición 24 - P_{24} -

	Actividad Matemática																			
Paso 1	Visualizar: Se observan seis triángulos equiláteros cada uno de diferente color.																			
																				
Paso 2	Identifica el patrón: La cantidad de puntos que los forman corresponde a un número triangular T_n : número triangular n (número figurado que representa la suma de los primeros naturales). $T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$	Establece regularidades																		
		<table><tr><th>Representación</th><th>Descomposición</th><th>Triangular</th><th>Total</th></tr><tr><td>$P_1 = 1$</td><td>$= 1$</td><td>$= 1$</td><td>1</td></tr><tr><td>$P_2 = 1 + 6$</td><td>$= 1 + 6(1)$</td><td>$= 1 + 6(T_1)$</td><td>7</td></tr><tr><td>$P_3 = 1 + 6 + 12$</td><td>$= 1 + 6(1 + 2)$</td><td>$= 1 + 6(T_2)$</td><td>19</td></tr><tr><td>$P_4 = 1 + 6 + 12 + 18$</td><td>$= 1 + 6(1 + 2 + 3)$</td><td>$= 1 + 6(T_3)$</td><td>37</td></tr></table>	Representación	Descomposición	Triangular	Total	$P_1 = 1$	$= 1$	$= 1$	1	$P_2 = 1 + 6$	$= 1 + 6(1)$	$= 1 + 6(T_1)$	7	$P_3 = 1 + 6 + 12$	$= 1 + 6(1 + 2)$	$= 1 + 6(T_2)$	19	$P_4 = 1 + 6 + 12 + 18$	$= 1 + 6(1 + 2 + 3)$
Representación	Descomposición	Triangular	Total																	
$P_1 = 1$	$= 1$	$= 1$	1																	
$P_2 = 1 + 6$	$= 1 + 6(1)$	$= 1 + 6(T_1)$	7																	
$P_3 = 1 + 6 + 12$	$= 1 + 6(1 + 2)$	$= 1 + 6(T_2)$	19																	
$P_4 = 1 + 6 + 12 + 18$	$= 1 + 6(1 + 2 + 3)$	$= 1 + 6(T_3)$	37																	

Paso 3	Formular conjeturas: En la posición 24 deben ir 1 más 6 veces la suma de los $(n-1)$ números naturales, en este caso 24-1, es decir la suma de los primeros 23 números naturales.	Verificar la conjetura: $P_{24} = 1 + 6(1 + 2 + \dots + 23) = 1 + 6(T_{23}) = 1657$
----------------------	--	---

A partir de esta tarea se realiza el proceso de generalizar el número de puntos requeridos para construir cualquier hexágono regular teniendo en cuenta lo hecho anteriormente: “El hexágono regular de la posición n está conformado por 6 veces el número triangular $(n-1)$, más una unidad que corresponde al punto con el que se inició $P_n = 1 + 6(T_{n-1})$ ”

Por último, se presenta la *Tarea C*, en la cual se pretende identificar los números primos y la característica adicional que poseen: ser diferencias de números cubos consecutivos.

Tarea C: La cantidad de puntos necesarios para armar los hexágonos regulares, está dada por la

sucesión $S_n = 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, \dots, 1657, \dots$. Encuentra características comunes entre los números 7, 19, 37, 61, 127 y 1657.

7	$= 2^3 - 1^3$	$= 8 - 1$
19	$= 3^3 - 2^3$	$= 27 - 8$
37	$= 4^3 - 3^3$	$= 64 - 27$
61	$= 5^3 - 4^3$	$= 125 - 64$
1657	$= ?^3 - ?^3$	$= ? - ?$

Con esta tarea, además de desarrollar las actividades de visualizar, identificar patrones, formular y validar conjeturas también entra en juego la actividad de generalizar.

Referencias

- Ángel, L., Álvarez, I., Carranza, E. y Soler-Álvarez, N. (2013). *Actividades matemáticas: conjeturar y argumentar*. Artículo inédito no publicado. Bogotá: Colombia.
- Carmody, P., Pegg, E. y Weisstein, E. (s.f.). *Cuban Prime*. From MathWorld--A Wolfram Web Resource. Recuperado de <http://mathworld.wolfram.com/CubanPrime.html>
- Luque, C., Mora, L. y Páez, J. (2002). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Contar e Inducir*. Bogotá: Antropos.
- Pickover, C. (2002). *El prodigio de los números. Desafíos, paradojas y curiosidades matemáticas*. Barcelona: Ediciones Robinbook

La “bruja de Agnesi”

Samuel Alberto Cristancho Rincón¹
Sileni Marcela Carranza Cantor

La “bruja de Agnesi” es conocida así por el traductor John Colson, puesto que en el libro donde aparece dicha curva está como *versiere Agnesi*, que traducido es cuerda que anuda un marino; el traductor confundió *versiere* con *avversiera* que significa diablesa o bruja.

La “bruja de Agnesi” es una curva con un trazado simétrico, que corresponde a una ecuación cúbica con dos incógnitas y tres propiedades interesantes. Esta curva fue estudiada por Fermat² en 1703 y por Grandi³ en 1718, al encontrar un método de construcción, llamando a esta curva como *versoria*.

Más tarde, en 1748 María Gaetana Agnesi (1718 - 1799), destacada en diferentes disciplinas como lingüística, filosofía y matemática, publicó el libro *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*, que traducido al español es *Instituciones analíticas para el uso de la juventud italiana*, en el cual aparece la construcción de esta curva -puede decirse sencilla- y sus respectivas ecuaciones, de la que se determina la ecuación de la “bruja de Agnesi” y sus ecuaciones paramétricas. Dicha obra, traducida al inglés y al francés, fue el primer texto que trabajó conjuntamente el cálculo diferencial con el cálculo integral

Se han encontrado diferentes aplicaciones para la curva, como lo son:

1. La descripción física de los fenómenos de resonancia.
2. En estadística.

3. La distribución de Cauchy de una variable aleatoria.

De las anteriores aplicaciones, se deducen por geometría analítica las ecuaciones:

1. Ecuación estándar que está dada por: $y = \frac{8x^3}{x^2 + 4x^2}$

2. Ecuaciones paramétricas:

$$x = wz, \quad y = \frac{w}{1+z^2} \quad \text{ó} \quad x = z \cot \theta, \quad y = z \sin^2 \theta$$

Y a partir de esta información y la construcción se identifican algunas propiedades, como:

1. La recta $y = 0$ es una asíntota de la “Bruja de Agnesi”.
2. El área entre la curva y su asíntota es cuatro veces el área del círculo fijo dado $4\pi r^2$
3. Sus puntos de inflexión están dados por :

$$x = \pm \frac{r}{\sqrt{3}}$$

4. El volumen de revolución con respecto a la asíntota es de $4\pi 2r^3$
5. El centroide de la curva está dado por la coordenada

$$\left(0, \frac{r}{2}\right)$$

Esta curva además de verse en geometría analítica, cálculo diferencial e integral, tiene aplicaciones en

¹ Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D. C. dma_cristancho181@pedagogica.edu.co

² Pierre Fermat (1601 - 1665) Jurista y matemático francés, apodado “Príncipe de los aficionados”; junto con René Descartes fue uno de los principales matemáticos de la primera mitad del siglo XVII.

³ Luigi Guido Grandi (1671 - 1742) Matemático italiano, describió propiedades de la curva logarítmica; se interesó por temas geométricos, físicos y filosóficos.

física, química, estadística, distribución de Cauchy de una variable aleatoria.

Por ejemplo: un átomo afectado por una radiación monocromática emite una radiación, cuya intensidad

depende de la frecuencia de la radiación emitida y la relación de estas dos está dada por la “Bruja de Agnesi” y su respectiva construcción.

Referencias

- ¡Mates, Mates! La cara bonita de las matemáticas. (2012, 8 Marzo). La Bruja de Agnesi. Madrid: Miguel Ángel Díaz Martínez. Revisado desde internet. <http://matesmates.wordpress.com/acerca-de/>
- El Matenavagante. Un periplo por los siete mares de las ciencias exactas (2009, 22 Agosto). Sobre la Curva de Agnesi. Granada, España: Paulino Valderas. Revisado desde internet. <http://elmatenavagante.blogspot.com/2009/08/sobre-la-curva-de-agnesi.html>
- Cine-Matica. (2012, 10 Marzo). María Gaetana Agnesi y su bruja. Lara, Venezuela: Douglas Jiménez Revisado desde internet. <http://douglas-cine-matica.blogspot.com/2012/03/maria-gaetana-agnesi-y-su-bruja.html>

Intervalos de confianza con estudiantes universitarios

Diana Isabel Quintero Suica¹

Yineth Paola Sáenz Neira²

Frecuentemente en el proceso de enseñanza de los objetos matemáticos, en especial de los intervalos de confianza, se hace énfasis en el desarrollo y ejercitación de procedimientos y técnicas para realizar el cálculo del intervalo a partir de un nivel de confianza establecido. Si bien esto es importante, en el proceso de enseñanza se hace poco énfasis en el significado o interpretación del nivel de confianza asociado al contexto del problema que generó la estimación de dicho intervalo. En este trabajo se presenta una propuesta de enseñanza para abordar dicho significado o interpretación del nivel de confianza.

Presentar una propuesta de enseñanza para abordar la interpretación del nivel de confianza con estudiantes universitarios, es el propósito que se planteó en el proyecto de investigación DMA – 354 – 13, titulado “Intervalos de confianza con estudiantes universitarios”, el cual se desarrolla en la actualidad por el grupo de investigación de la Línea de la Estadística del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Las personas que presentaron esta propuesta y que están a cargo del proyecto de investigación son los docentes Felipe Fernández, Luisa Andrade e Ingrith Álvarez. Las autoras del presente documento, proporcionan su colaboración a este proyecto de investigación en la modalidad de monitoras.

Esta propuesta de enseñanza se elaboró teniendo en cuenta las diferentes concepciones conocidas acerca del nivel de confianza en un intervalo, en algunos casos documentadas en la literatura, y que finalmente los estudiantes adoptan; y los posibles errores y dificultades que surgen en el momento de estructurar dicha concepción. Por medio del contraste

y cuestionamiento de las diferentes interpretaciones del nivel de confianza asociado a un intervalo, se busca posicionar una nueva significación de este concepto.

El resultado ha sido la construcción de una secuencia de tareas que se divide en cinco partes o secciones, todas envueltas en una situación predeterminada y cada una con un propósito específico que aporta a la significación del nivel de confianza. A continuación esbozamos algunos ejemplos representativos que aportan a cumplir los objetivos de cada parte del taller de instrucción:

Situación

Mundialmente se ha reconocido que aquellas personas que tienen un coeficiente intelectual (C.I.) igual o superior a 125 puntos, son superdotados. En el colegio “Los Pilos” en donde hay 1000 alumnos en los grados de sexto a once, se quiere realizar una prueba para determinar el puntaje del coeficiente intelectual representativo de estos cursos. Los costos de la prueba son muy altos y el colegio no dispone de suficientes recursos para aplicarla a todos los estudiantes.

Primera Parte

En esta sección mostramos a los asistentes tres ejemplos en donde se pretende que identifique lo que es una población de datos, una población de individuos, una muestra de datos y una muestra de individuos y que por medio de este proceso, reconozcan las diferencias entre cada uno. Los ejemplos mostrados son:

¹ Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C. dma_dquintero472@pedagogica.edu.co

² Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá. D. C. dma.ysaenz@pedagogica.edu.co

Ejemplo 1

Alumno	a1	a2	a3	...	...	aj	...
Puntaje de C.I.	112	126	120	...	...	98	...

Ejemplo 2

Alumno	Juan	Luis	Pepe	...	...	Lucia	...
Puntaje	112	126	120	...	...	100	...

Ejemplo 3

Puntaje de C.I.	112	126	120	...	...	98	...
-----------------	-----	-----	-----	-----	-----	----	-----

Segunda Parte

En esta parte, se presentan nuevamente tres ejemplos de muestras de datos aleatorias seleccionadas de la población de la situación, en donde se pide a los asistentes especular acerca de si la media de una de las muestras es diferente a las dos restantes. También mostramos una afirmación sobre la cual los asistentes comentaron sobre su validez. Los ejemplos mostrados y la afirmación son los siguientes:

Muestra 1

155	88	96	108	140	129	134	102	110	129
114	117	120	123	117	146	93	119	105	127

Muestra 2

108	115	129	131	122	135	119	115	111	92
126	125	103	123	88	104	107	124	102	85

Muestra 3

101	134	135	108	99	103	129	117	105	149
116	129	132	108	134	88	130	120	114	118

El hecho de que las medias determinadas puedan ser diferentes, implica que la media de la población no sea única.

Tercera parte

En esta parte, siguiendo con la misma dinámica que las anteriores partes, se muestran tres intervalos

construidos a partir de las muestras de la parte dos, con un nivel de confianza del 90%, y se pide a los asistentes que den su interpretación acerca de lo que significa el nivel de confianza, siempre y cuando tengan un concepto básico de lo que es un intervalo de confianza, y cuestionar dicha interpretación para establecer posibles errores en ella. En caso de no conocer el tema, se brindará una breve explicación de lo que es un intervalo de confianza y los errores que se generan al adoptar algunas de las interpretaciones de nivel de confianza.

Intervalo 1 [113,124]

Intervalo 2 [109,117]

Intervalo 3 [114,123]

Cuarta y Quinta parte

Después de los ejemplos presentados a los asistentes en las partes anteriores, se brindará grosso modo las tareas que se desarrollan en estas secciones, que son una simulación manual y otra computarizada; y su propósito, el cual es estructurar la interpretación del nivel de confianza asociado a un intervalo viendo que es el porcentaje de intervalos de los posibles a calcular, que contienen la media poblacional.

Esta propuesta de enseñanza se encuentra en la actualidad en ejecución y se espera presentar los resultados parciales en Diciembre de 2013 y los resultados definitivos en Junio de 2014.

Referencias

- Behar, R. (2004). La Estadística en la Educación Superior. ¿Formamos pensamiento Estadístico? *Ingeniería y Competitividad*. 5(2), 84 – 90.
- Olivo, E. (2008). *Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México*. (s.l.): (s.e.)

La criba de la parábola

Britany Johana Salazar Salazar¹

Diana Isabel Quintero Suica²

A través de los tiempos los matemáticos han propuesto múltiples formas, todas fallidas, para intentar conocer la forma de los números primos. Sin embargo, aunque estas formas no han funcionado para este propósito, de estas producciones se obtienen resultados importantes, como lo son las cribas para determinar los números primos menores de cierta cantidad dada. Una de las cribas más conocida es la de Eratóstenes, también tenemos la criba de K.P Swallow y la criba de la parábola, entre otras. En este trabajo presentaremos esta última criba mencionada, que fue creada por Yuri Matiyasevich y Boris Stechkin.

Los números primos, a través de los siglos, han fascinado a muchos matemáticos; especialmente porque no responden a algún patrón hasta ahora conocido. En los intentos de encontrar dicho patrón se han producido diferentes métodos, para tratar de conocer nuevos números primos o incluso para conocer los de números primos menores a cierta cantidad dada. Atendiendo a esta última intención se generan las llamadas cribas.

Una de las definiciones de criba en la Real Academia de la Lengua Española la describe como una ‘selección rigurosa’; y justamente eso es lo que hacen las cribas en matemáticas: seleccionar, a partir de un número dado, los números que son primos y los que no los son, es decir, separar los números que son compuestos de los números primos.

Como lo mencionamos anteriormente, una de las cribas más conocidas es la de Eratóstenes. Sin embargo, existe un método geométrico que es bastante curioso e interesante, llamado la criba de la parábola, presentada en este trabajo, que tiene el mismo fin de seleccionar los números primos dado un cierto número.

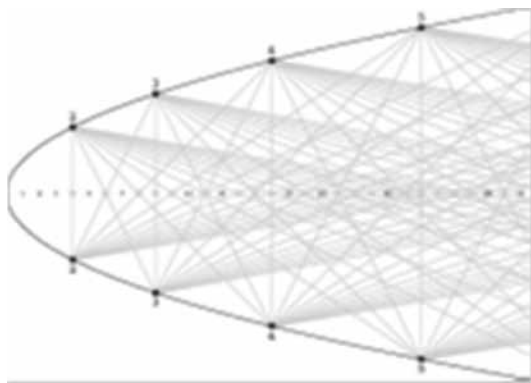
Los creadores de esta parábola son el matemático Yuri Matiyasevich y el científico Boris Stechkin, ambos de nacionalidad rusa. El primero, nacido el 2 de marzo de 1947 en Leningrado, no tan conocido por ser el creador de esta parábola sino por resolver el décimo problema de Hilbert en 1970, demostrando que dicho problema es irresoluble. El segundo, nacido el 5 de agosto de 1891, igualmente que el primero, no tan conocido por la criba de la parábola, sino especialmente por ser el padre de la teoría del sistema de motor de aire para respirar.

El funcionamiento de la criba de la parábola consiste en representar gráficamente la parábola $2x = y^2$. Luego, sobre el eje x para cada número natural mayor que dos tal que sea número cuadrado perfecto, se trazan rectas perpendiculares al eje de las abscisas tal que cada una de ellas contenga uno de dichos números. La intersección de cada una de estas perpendiculares con la parábola generan dos puntos, uno en el primer cuadrante y otro en el cuarto cuadrante. Por último, se trazan segmentos cuyos extremos sean los puntos del primer y cuarto cuadrante, es decir, cada punto del primer cuadrante será extremo de tantos segmentos como puntos en el cuarto cuadrante haya. Las siguientes imágenes muestran lo dicho anteriormente:



¹ Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C. dma_bsalazar058@pedagogica.edu.co

² Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C. dma_dquintero472@pedagogica.edu.co



Como podemos ver, los segmentos contruidos al intersectarse con el eje nunca lo hacen en los números primos. Esto es fascinante!!!

La demostración de que el método funciona, en nuestra fuente de consulta, se presenta en especial para esta parábola en particular, sin embargo, en nuestro trabajo logramos identificar dos familias de parábolas (pueden no ser las únicas), para las cuales el método sigue funcionando. Dichas familias de parábolas son: $y^2 = (2n)x$ y $y^2 = (2n + 1)x$, con $n \in \mathbb{Q}$ y $n \geq 1$ para el primer caso, ó $n > -\frac{1}{2}$ para el segundo caso. El argumento de la demostración la presentamos a continuación para una de estas familias:

Sean los puntos E y C tales que $E_i = (i^2, \sqrt{(2n)i^2})$ y $C_j = (j^2, -\sqrt{(2n)j^2})$, con $i, j \geq 2$. Toda recta que contiene a E_i y C_j será:

- Si $i = j$ entonces $x = ij$ o lo que es lo mismo $x = i^2$.

- Si $i \neq j$ entonces $\frac{y}{\sqrt{2n}} = -\frac{x}{(j-i)} + \frac{ij}{(j-i)}$

Llamemos C al punto de intersección de los segmentos contenidos en estas rectas con el eje, de lo cual puede pasar:

- Si $i = j$ entonces las coordenadas de C son $(ij, 0)$.
- Si $i \neq j$ entonces las coordenadas de C , igualmente serán $(ij, 0)$.

Con lo cual se demuestra que los segmentos cuyos extremos son los puntos y intersecan al eje en los puntos $(ij, 0)$, es decir en los puntos cuya primera coordenada es producto de dos números enteros positivos mayores o iguales que dos, por lo cual esta coordenada no será un número primo. Es importante resaltar que si bien, nuestro trabajo se ha hecho para dos familias de parábolas, aún sospechamos que puede funcionar para otras tantas parábolas, algo en lo que el lector puede profundizar caracterizando todas las parábolas que cumplen con estas reglas.

También hacemos ver que en las ecuaciones $y^2 = (2n)x$ y $y^2 = (2n+1)x$, aunque determinamos que $n \in \mathbb{Q}$ no descartamos la posibilidad de que $n \in \mathbb{R}$. Esta es otra buena posibilidad en la cual el lector interesado puede profundizar.

Referencias

Alcaide, J. (2009). Lo racional no interesa. Recuperado de: http://verso.mat.uam.es/web/index.php?option=com_docman&task=doc_view&gid=279&tmpl=component&format=raw&Itemid=191%E3%80%88%3Des&lang=es.

Gracián, E. (2010). *Los números primos: un largo camino al infinito*. Cádiz, España: RBA Libros.

Morales, M. (2013, 21 de enero). La sorprendente criba de la parábola [web log post]. Recuperado de: <http://gaussianos.com/la-sorprendente-criba-de-la-parabola/>

Experiencia significativa

Maria Neila Guzmán Guzmán¹

Pensaba que los profesionales de las ciencias exactas eran tan prácticos, tan calculadores y tan fríos, que no podían percibir la belleza del alma, la sencillez de la verdadera grandeza, lo sublime de los sentimientos... que estas facultades eran posesión exclusiva de los artistas, los literatos, los filósofos... hasta cuando la sensibilidad y calidez humana de un matemático, me demostró lo contrario.

En el año 2010 el docente Ovímer Gutiérrez Jiménez, Licenciado en Matemáticas, Especialista en Gerencia Educativa, con Diplomado en Informática, hoy Magíster en la Enseñanza de las Ciencias Exactas, fue vinculado a la Institución Educativa Minuto de Dios Fe y Alegría sede Padilla del municipio de Lérída-Tolima, única alternativa de Educación Básica Secundaria, con la modalidad Post-primaria para los jóvenes de varias veredas entre las más distantes del municipio; tomando la carga académica de su área y la tecnología de la post-primaria; compenetrándose con estudiantes, compañeros y padres, hasta ganarse el respeto, el afecto y la admiración de la comunidad educativa e impactando de manera extraordinaria y sorpresiva al estudiante con discapacidad física, Lisandro Mendoza, que en opinión del fisiatra que lo atendió desde cuando nació, no existe una base científica que explique su evolución, y la familia atribuye en primer lugar a un milagro divino y como resultado del trato amoroso, concertado, respetuoso... que le brinda, convirtiéndose en sus maestros particulares, por temor al traumatismo que pudiera generarle la escuela, hasta cuando llegó a Padilla.

Ovímer le mostró el camino para que creyera en sus capacidades, aptitudes y talentos, dándole aceptación, comprensión y apoyo; entendiendo y asumiendo el desafío de trabajar con estudiantes diferentes, explotando al máximo su potencial humano y haciendo efectiva la inclusión con

métodos pedagógicos alternativos para estudiantes con necesidades especiales.

Para revertir la apatía generalizada en estudiantes y padres de familia a causa de la realidad de su contexto, provenientes de sectores marginados, con precaria situación económica, mínimas oportunidades laborales y de educación media, expuestos al reclutamiento de los grupos armados que operan en la región, se hizo prioritario la apertura de los grados de la media, proyecto avalado por el especialista Jesús Emilio Lozano, rector de la Institución.

Reto al que el docente Ovímer Gutiérrez correspondió tomando las áreas de la modalidad Técnica Comercial de la Media con una propuesta creativa, atractiva y productiva, consistente en impulsar a los estudiantes en la creación de una empresa que les generara recursos y les permitiera registrar todos sus movimientos contables, archivar sus documentos legales, darle un adecuado manejo de mercadeo, hacer uso de las tecnologías de punta e implementar su propia fábrica; dando aplicabilidad a todos los conocimientos teóricos que les impartía en las áreas de contabilidad, archivo, comercio, sistemas y proyectos pedagógicos productivos; compromiso que los estudiantes asumieron responsablemente adquiriendo un aprendizaje efectivo, ameno y práctico y que en Lisandro se evidenció en sus habilidades para el liderazgo, el manejo de equipos, diseño gráfico y de audiovisuales, diseño web, mantenimiento de equipos, formateo de computadores y autoformación mediante tutoriales descargados de internet...

Nos jugamos el todo por el todo, el rector asumiendo los riesgos de la apertura de un grado sin aprobación, los docentes multiplicando nuestros esfuerzos para sostener la carga académica, los padres y estudiantes

1. Licenciada en Filosofía y Educación Religiosa de la Universidad Católica del Norte. Profesora, Institución Educativa Minuto de Dios Fe y Alegría, Padilla. Lérída-Tolima. alien_namzug@hotmail.com

exponiéndose a que sus estudios no fueran reconocidos... en aras de convencer, con nuestra experiencia, las instancias del gobierno para que avalaran nuestra propuesta, inútilmente, los grados de la media no fueron aprobados y Ovímer, contra el sentir de la comunidad y, pese a sus reiteradas solicitudes para que lo reubicaran en alguna de las plazas que iban siendo liberadas cerca, a fin de terminar su maestría, fue trasladado para uno de los municipios más apartados del departamento.

Pero como el mejor líder es el que se perpetúa en su obra, con la partida de Ovímer no claudicó nuestra propuesta, amparados en el Decreto 2082 del 18 de noviembre de 1996, por el cual se reglamenta la atención educativa para personas con limitaciones o con capacidades y/o talentos excepcionales y atendiendo a la valoración médica que especifica hipoxia neonatal con secuelas invalidantes en función motora y visual, y determina que el estudiante Lisandro Mendoza, hoy Bachiller y Aprendiz de Sistemas del SENA, necesita de terceras personas para realizar los quehaceres del diario vivir incluida su seguridad personal y, la historia clínica que le diagnostica baja visión; junto con nuestro rector, diseñamos el “PROYECTO DE INCLUSIÓN A ESTUDIANTES CON LIMITACIONES Y/O TALENTOS EXCEPCIONALES” (artículo 16 Capítulo III Decreto 2082), para dar viabilidad a la atención personalizada al estudiante, con actividades

desescolarizadas en la sede Padilla; bajo compromiso de colaborar con todas las actividades que requerían su desempeño tecnológico, dando apertura así a la inclusión de estudiantes con limitaciones y/o con capacidades o talentos excepcionales, respondiendo con ello a los principios de integración social y educativa, desarrollo humano, oportunidad y equilibrio y soporte específico que contempla la ley (artículo 3° Decreto 2082),

Ovímer valientemente continuó con su maestría, exponiéndose a viajar de noche por las desoladas y peligrosas carreteras del sur del Tolima, para dar cumplimiento a su trabajo y a sus tutorías, en la Universidad Nacional Sede Manizales, hasta ser nombrado Director del Programa de Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad del Tolima; y Lisandro presta sus servicios de soporte técnico a la sala de sistemas de la sede Padilla (mantenimiento, limpieza, revisión, formateo, instalación y actualización de antivirus), en el desempeño de sus pasantías para recibir el título de TÉCNICO EN SISTEMAS.

La entrevista y el cuento que a continuación expongo, dan testimonio del desencanto que la escuela le producía a LISANDRO y del trascendental cambio que la estrategia pedagógica de Ovímer ejerció en su ánimo.

Entrevista al estudiante Lisandro

Nombre: Lisandro Mendoza
 Profesión: Estudiante
 Institución: Minuto de Dios Fe y Alegría Padilla
 Edad: 20 años
 Cédula: 1.110.516.325 de Ibagué
 Celular: 3204726878
 E-mail: djfenix91@yahoo.es
 Estado Civil: Soltero



-¡Hola Lisandro!-

- Si, hola-

-¿Te gustaría compartir tu experiencia educativa, para que otros estudiantes en tus mismas condiciones la conozcan?-

-Sí, no tengo ningún problema-

-¿Qué piensas del estudio?-

-La verdad a mí nunca me gustó la escuela, cuando estábamos en Planadas casi nunca fui, en casa no me obligaban, nunca me han obligado a nada; yo prefería que mi mamá me enseñara porque ella no me impone las cosas; cuando llegamos a Padilla, el colegio me pareció mejor, pero igual me aburría y muchas veces no iba, incluso cuando estaba en séptimo, en una actividad de Lengua Castellana escribí un cuento contra el estudio, al profe IGNACIO le gustó mucho y en una reunión de la sede central lo leyó- (se ríe) -mi tortura era la lectura, ahora ya no, porque en la pantalla puedo aumentar el tamaño de las letras, la verdad en el computador fue que aprendí a leer; a mí me gusta aprender cosas chéveres, que sirvan para algo, pero a tanta cosa que hay que ver no le encuentro sentido; cuando llegó el profesor OVÍMER todo cambió, él me nombró monitor de la sala de sistemas y eso sí me gustó, desde entonces no volví a fallar-

-¿Nos regalarías una copia de ese cuento?

-Claro-

-A propósito del profesor Ovimer, ¿qué más tienes que decir?

-Que es el mejor, sabe mucho, enseña bien, es amigo de todos, lo valora a uno, por él le cogí amor al estudio, hasta las matemáticas que no las podía ni ver las empecé a entender, la contabilidad que me habían dicho que era el coco la cogí de una; todo lo que hicimos con él me pareció bacano, hasta ganas de participar en los actos culturales me hizo dar por lo divertido que es para las obras de teatro; la cooperativa fue lo máximo, yo fui el que más ganancias tuve y ahora sé a qué dedicarme, porque me fascinan los computadores y gracias a él aprendí a hacer muchas cosas con ellos-

-¿Qué proyectos tienes para el futuro?-

-Si el profesor Ovimer vuelve y abren el once me gradúo aquí, si no espero a que nos vayamos para el pueblo para buscar algo por Internet porque aquí no tenemos señal, cuando en el colegio había red hice algunos cursos del SENA, a otro colegio no pienso ir, mis padres me van a ayudar para que termine la secundaria en forma virtual y trabaje en un Internet o monte mi negocio propio-

-¿Qué otra cosa quisieras comentar respecto a la educación?-

-Que sería muy triste que el profe Ovimer no volviera y no abrieran el once, no solo por mí sino también por mis compañeros, tener que desparajarnos cada uno por su lado, no poder

continuar con nuestra cooperativa, no podemos graduar juntos, incluso que Sonia, Gleysi y Juan David que viven tan lejos o Leonel que es tan pobre y solo tiene a la abuelita no puedan continuar, Juan Carlos y Juan Pablo serían los únicos porque viven aquí y les sirve el transporte; igualmente sería muy injusto que el profe Ovimer se tuviera que ir lejos y dejara la maestría que es lo que más quiere-

-Gracias Lisandro, ojalá tus planes se cumplan y tus deseos se hagan realidad-

-OK-

Padilla, 20 de diciembre de 2011

El cuento de la cripta (Cuento)

Lisandro Mendoza Guzmán¹

En una vereda del Tolima de nombre Padilla había una cripta llamada Institución Educativa Minuto de Dios Fe y Alegría, donde encerraban los niños y los torturaban con un libro diabólico con poderes mágicos, de contenido salvaje, conocido como ¡ LENGUAJE!

Cierto día se liberó el maléfico poder del libro y la cripta se volvió un infierno, invocando demonios, el libro cobró vida y su poder aumentaba cuando era leído.

Tiempo después apareció un súper-héroe, que sabía la forma de destruir el hechizo, ¡QUEMAR EL LIBRO!, pero no contaba con los guardianes que obligaban a los niños a leerlo, ogros que antiguamente habían sido guerreros legendarios, poseídos por el libro maldito, que se hacían llamar ¡MAESTROS!

Lo peor era que el libro tomaba más poder cada día y los guardianes lo protegían en una fortaleza

denominada ¡BIBLIOTECA!, para entrar allí se necesitaba de un poder infinito y una fuerza increíble, el súper-héroe logró hacerlo pero para destruir el libro necesitaba la ayuda de todos los niños.

Empezó una guerra entre el bien y el mal, el cielo se oscureció y cuando el libro estaba a punto de embrujar al súper-héroe entraron los niños y le prendieron fuego, terminando con el hechizo.

La cripta se transformó en un parque de diversiones, la fortaleza en sala de videojuegos, los ogros regresaron a su forma original, del súper-héroe no se volvió a saber y los niños fueron libres y felices por siempre hasta la eternidad.

(Publicado en la Página Literaria del Periódico Mural, IV Trimestre 2008, por Luis Javier Quesada del grado sexto).

1. Estudiante de grado Séptimo, de la Institución Educativa Minuto de Dios Fe y Alegría, sede Padilla, Municipio de Lérída, Tolima. Año 2007.

Acerca de la enseñanza

Leidy Yhovana Orozco Vique¹

Sobre la enseñanza, como paralelo del aprendizaje, existen aún muchos cuestionamientos que resolver. Y aunque sabemos que el rol lo deben desempeñar los maestros, no se puede afirmar que todos hayamos realizado una reflexión, sobre las implicaciones que abarca la práctica del ejercicio.

Partiendo del concepto, se puede englobar varias definiciones y cada persona tendrá una en la que podrá considerar la idea de enseñanza. Podemos decir que la enseñanza es una actividad que va más allá de la información transmitida en cada materia de estudio, y esta en realidad responde a un momento y a una sociedad determinada y como tal está definida desde una visión del mundo y a unas necesidades precisas del entorno en el que se inscribe.

Según Paulo Freire “enseñar no es transferir conocimiento, sino crear las posibilidades para su producción o su construcción”, a partir de esta “premisa” y asumiendo que la principal tarea del docente radica en crear un entorno en el que el aprendizaje resulte productivo, el autor nos incita en nuestro quehacer pedagógico la importancia que tiene enseñar a pensar.

Entonces, podría decir que, en un extremo, el ejercicio docente se ve en la práctica de unos intereses sociales y en el otro, considera, en este mismo quehacer, el énfasis en los intereses individuales. Es así como surge un interrogante acerca de si educamos para la vida o para el trabajo y con esta discusión surge la polémica acerca del real papel de la educación en cuanto al ser humano.

En realidad, la enseñanza condensa dentro de sí, tanto los intereses de la especie como los del individuo. Sin embargo, cada momento histórico ha definido un énfasis y esta determinación ha arrojado

como resultado el cambio de la escuela misma y de las dinámicas que se presentan a su interior.

Si bien la escuela tiene como función el mantenimiento de una serie de valores, también cumple un papel decisorio en cuanto al futuro de la humanidad. El significado social de la escuela y de la enseñanza se estructura alrededor de esta permanente dialéctica entre pasado y futuro y tiene como eje la preservación de la vida.

Esta última consideración es la que nos permite afirmar que la enseñanza va más allá de los contenidos. Si el énfasis estuviera en ellos, la escuela permanecería en una mentalidad instrumental, y además, extremadamente conservadora en cuanto al desarrollo de la inteligencia, desde esta perspectiva no habría campo para la reflexión ni la proposición. Esta perspectiva nos lleva a pensar que el docente debe estar preparado para todo tipo de retos en la enseñanza; es decir para tomar decisiones, que van más allá de los contenidos de su asignatura, como para la planeación de su ejercicio.

Pese a las muchas direcciones que nos encamina este concepto, el ideal del ejercicio sería el de enseñar a pensar, y es por ello que su trabajo se basa en estimular las operaciones de pensamiento. Cada disciplina establece sus propios parámetros, pero el objetivo final es aporte de un plan mayor que se constituye en el sentido mismo de la educación, y que depende de las necesidades y sueños de la sociedad. La contextualización de los fines pedagógicos es tarea principal del enseñante y requiere de una alta disposición para conocer el medio y sus necesidades.

Las actuales preocupaciones pedagógicas han restringido la problemática de la enseñanza a los métodos. En una era instrumental, el pensamiento

¹Estudió seis semestres en el programa Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Tolima. Graduada del programa Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Magdalena. barbieyhovana@hotmail.com

mismo exige razones que cumplan objetivos específicos. Si bien la enseñanza tiene una relación con los medios y métodos, ella va más allá porque se inscribe en un proyecto educativo, una política y unos ideales sociales que le dan cohesión y sentido.

Según lo anterior, la enseñanza va más allá de los medios, en tanto responde a ideales y planes políticos y sociales, pero para lograr efectividad, debe internarse en la esencia misma de la disciplina y entender lo específico de ella, el enseñante sabe su responsabilidad y le da sentido a su labor, pues entiende que su trabajo de todos los días sobrepasa lo específico y encuentra sentido en la conformación de inteligencias que se convierten en bienes preciados de una sociedad.

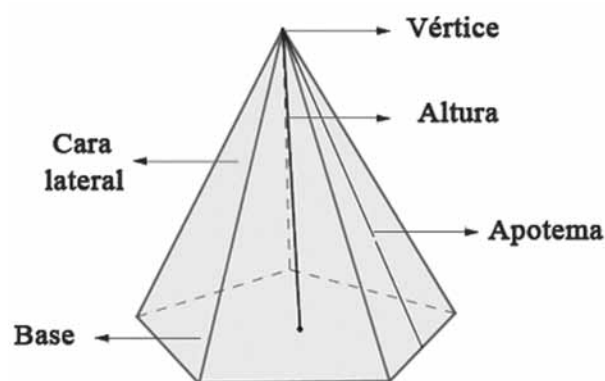
La tarea fundamental del profesor, en cuanto al conocimiento como tal, es enseñar a pensar. Más que informar o dar datos, el maestro debe trabajar por habilitar al estudiante a pensar. Según Louis Rath (1997), el maestro debe conocer y fomentar el ejercicio de las operaciones de pensamiento ya que son ellas las que estimulan y ejercitan al estudiante para ejercerlo.

Estas operaciones deben ser la base de cada actividad llevada a cabo en el aula. Son ellas comparar, resumir, observar, clasificar, interpretar, formular críticas, imaginar, organizar datos, formular hipótesis, diseñar y hacer investigación.

La geometría sin espacio dentro del aula de clase

José Jair Sáez¹
Jaiver Alberto Muñoz Barbosa²

Resumen. Este artículo muestra cómo la Geometría ha perdido interés, desde el comienzo de la historia hasta nuestros días, y lo importante e indispensable que es para la educación en diferentes campos del saber. También muestra la necesidad de capacitar a los docentes de matemáticas en esta área, para así poder llevar este conocimiento y expandirlo en el aula de clase.



El trascendental momento histórico de la Geometría en el antiguo Egipto, repercutió en los griegos quienes la retinaron y la hicieron partícipe en la Educación. Muy pronto se convirtió en un eslabón importante para la construcción, y gracias a ella, los arquitectos medievales hicieron sus grandes diseños, específicamente las vidrieras encontradas

en algunas capillas. Hoy en día la Geometría es reconocida universalmente y aplicada en múltiples campos del saber. Jean Dieudonné aseveró en 1980, que la Geometría "... exclamando desde sus estrechos confines tradicionales ha revelado sus poderes ocultos y su extraordinaria versatilidad y adaptabilidad, transformándose así en una de las herramientas más universales y útiles en todas las partes de las Matemáticas".



En la actualidad y desde hace algún tiempo se ha perdido el interés por la enseñanza de la Geometría, ello obedece a tres problemas a saber: en primer lugar, al poco tiempo que la escuela le otorga; en segundo lugar, a la poca importancia que los docentes le dan; y en tercer lugar, a la intención del estado, de preparar personas para el trabajo. La falta de tiempo para la enseñanza de la Geometría dentro del aula es evidente, la escuela hasta el momento no le ha dado la importancia que dicha asignatura se merece. Vale decir que ninguna institución que pretenda pertenecer a la sociedad del conocimiento puede dejar en segundo plano la enseñanza de la Geometría, ya que ésta contribuye significativamente no sólo con la organización mental del niño en el espacio exterior, sino también con la estimulación

1. Estudiante de VII semestre de Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Tolima, Ibagué.

2. Estudiante de VII semestre de Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Tolima, Ibagué.

temprana del pensamiento lógico, lo que a la postre le dará la capacidad mental para efectuar diferentes tareas intelectuales que le permitan desenvolverse en diversos contextos.

Los docentes que no tienen una formación académica en Matemáticas y que por cuestiones burocráticas o por políticas del estado ocupan estas vacantes, parece ser una de las causas primarias por la cual estos educadores le dan poca importancia a la Geometría, lo que es natural, ya que ellos desconocen su importancia para el desarrollo intelectual de los estudiantes, puesto que no fue objeto de estudio en su formación profesional. A esto se le suma la apatía que el estudiante siente por dicho tema debido a que el docente no tiene claro que la didáctica natural de ésta permite satisfactoriamente el desarrollo intelectual del estudiante. De otro lado, la pérdida progresiva en la enseñanza de la Geometría, por parte de educadores no especializados en el área de Matemáticas, se evidencia en los hechos elementales o simples sobre figuras y sus propiedades, insuficientes para un desarrollo medianamente aceptable de la cognición del estudiante.

Por otra parte, el estado busca con su política educativa formar personas para el trabajo rústico y manual para lo cual no se requiere un intelecto sobresaliente, sino más bien un conocimiento básico en Matemáticas y en todas las áreas del conocimiento, es decir que el estudiante, por ejemplo, maneje las cuatro operaciones matemáticas básicas: sumar, restar, multiplicar y dividir en sus formas elementales. Lo que sin duda pone a la educación al servicio del capitalismo.

De esta manera, la realidad de la enseñanza geométrica, en todos sus esquemas, pasa de ser una realidad a una ilusión, pues se considera que la ilustración ha de beneficiar a quien pretende obtener conocimientos, pero la realidad de nuestra enseñanza de las Matemáticas, en todo su contexto, nos muestra que a pesar de los grandes esfuerzos la institucionalización de esta área es inútil. Esto se debe a que la mayoría de los docentes se han convertido en “**marionetas**”. Expertos en el asunto afirman, que es una dominación ministerial que considera la enseñanza escolar como un territorio para fundamentar principios y leyes, hegemonizadas en los libros del monopolio editorial. Estas organizaciones creen que así debe ser, ya que beneficia a la “sociedad”; una idea falsa que se ha

vendido desde hace tiempo. La verdad es que el conocimiento es restringido por la forma como lo han estructurado en los formateados currículos y contenidos de formación. Es una problemática que ha llevado a la malformación académica en todo su esplendor. Por un lado, los docentes están sujetos a educar con contenidos específicos de un libro o guía de trabajo impidiendo su flexibilidad. Y por otro, limitan su producción intelectual. Como consecuencia se han formado ciudadanos **ACRÍTICOS**, con déficit para elegir y decidir, lo que configura un pueblo oprimido en una sociedad con estado de derecho.



De lo anterior se puede decir que los docentes se han centrado en la enseñanza de los contenidos expresados en los “**libros de trabajo**”, en los cuales se manifiesta en particular el uso correcto y adecuado de la Aritmética para que aprendan a hacer cuentas, en donde se deja a un lado el desarrollo de la representación mental del espacio, fenómeno que se agudiza cuando el docente de turno no le “**alcanza el tiempo**”. Este es otro de los problemas en la enseñanza de la Geometría, al dejarla como último recurso, por si se alcanza, y no se está viendo por parte de los docentes que al igual que aprender a contar, también es importante usar el pensamiento espacial.

Considerando que la enseñanza de las Matemáticas se desarrolla desde el pensamiento, para el pensamiento de otros, la educación de la Geometría en el colegio debe ser importante para cada individuo; pues desde allí, éste se aproxima al conocimiento espacial y además a su correcta aplicación en la parte lúdica de

los diversos puntos de visión, desde donde se puede observar por ejemplo una estructura de cubos dentro de cajas. Esta experiencia con la parte tridimensional le ayuda al estudiante a ser creativo y propositivo, por las diferentes combinaciones que suceden en su cerebro al enfrentarse a cosas concretas de la cotidianidad.

En virtud de lo expuesto, es evidente que la Geometría cada vez más se distancia de la enseñanza escolar, lo peor del caso es que no se encuentra consenso del cómo superar esta brecha, concretamente en los grados inferiores del currículo escolar. La Geometría como un ejemplo paradigmático para la enseñanza del razonamiento deductivo cada día está perdiendo más espacio, siendo en sí misma la ciencia del espacio desde sus raíces.

Conclusiones:

- La geometría es reconocida universalmente y aplicada en múltiples campos del saber.
- El interés por la enseñanza de la geometría se ha perdido.
- La escuela otorga poco tiempo a la enseñanza de la geometría.
- Algunos docentes no prestan importancia a esta rama de las matemáticas.
- El estado no prepara personas para este trabajo.
- El estudio de la geometría ayuda a estimular el pensamiento lógico en el niño.
- Los docentes se han centrado en la enseñanza de los contenidos expresados en los libros de trabajo.



**Universidad
del Tolima**