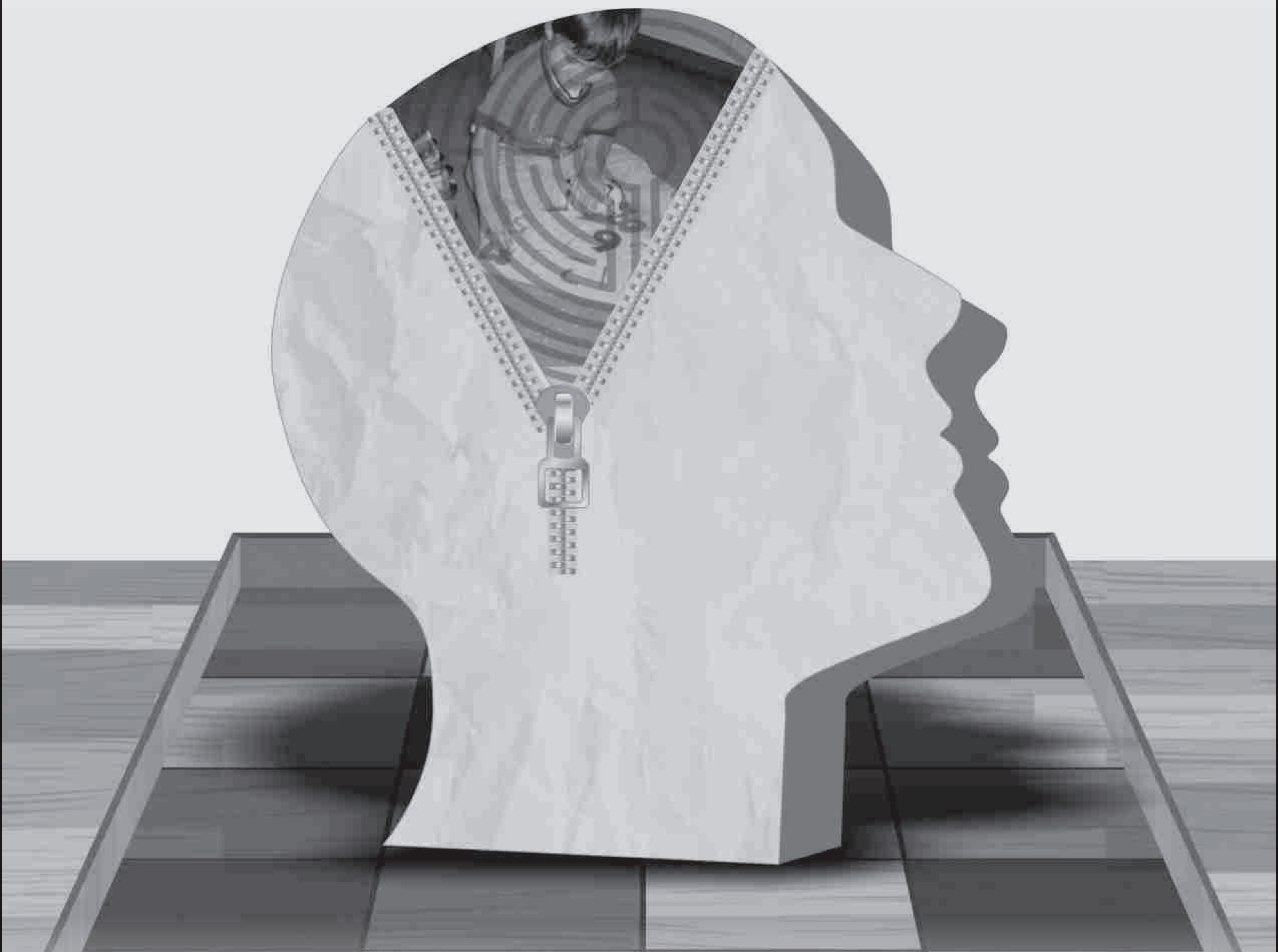
Revista

EJES

Educación Matemática

Revista Ejes



Facultad de Ciencias de la Educación
Licenciatura en Matemáticas
Número 2 - 2014. Ibagué - Tolima - Colombia
ISSN: 2357-3724

ISSN: 2357-3724

Carátula:
Colors Editores

Imagen tomada de: http://1.bp.blogspot.com/_T6eCra7u-hE/RvptnGWkCmI/AAAAAAAAAUA/k4fu0uHxUKI/s320/wwwbienvenidosorg.jpg
14815093-3d-cabeza-humana-y-o-cremallera-abierta-concepto-de-inteligencia

Diseño y Diagramación: Colors Editores

Periodicidad: Anual

Tiraje: 500 ejemplares

Contenido

Editorial

Con beneplácito entregamos a la comunidad universitaria el Número Dos de las revistas de los programas académicos de la Facultad de Ciencias de la Educación, de la Universidad del Tolima; a saber: *Ejes* de la Licenciatura en Matemáticas; *Apuntaciones*, de la Licenciatura en Lengua Castellana; *Breaking Boundaries* de la Licenciatura en Inglés; *Do-Ciencia,* de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Ciencias Naturales y Educación Ambiental; *Cultura del Movimiento*, de la Licenciatura en Educación Física, Deportes y Recreación y *Licienso UT* de la Licenciatura en Ciencias Sociales. Esta segunda edición constituye un aporte al cumplimiento de las metas institucionales, en concordancia con los requerimientos de la educación actual, lo que significa en palabras del profesor Guillermo Hoyos-Vásquez:

> "es imperativo que la educación retorne a su elemento fundante: el cultivo de la persona moral, porque solo desde una perspectiva de desarrollo humano como libertad, la ciencia, la técnica y la innovación pueden contribuir a una sociedad más incluyente y democrática; de lo contrario, la obsesión por la competitividad seguirá produciendo más exclusiones y desigualdad social, con lo que se dificultan, si no se imposibilitan, la convivencia pacífica y la participación activa de la sociedad civil". (Hoyos-Vásquez, 2009, 429)

En coherencia con este planteamiento en esta edición se reconocen y se exaltan los esfuerzos de estudiantes, graduados y profesores de los diferentes programas a través de la publicación de sus textos escritos; en ellos, dan cuenta del quehacer pedagógico diario de las aulas de pregrado y postgrado y, de los proyectos especiales de la Facultad. En los escritos sus autores muestran los procesos pedagógicos, didácticos e investigativos que se desarrollan a lo largo de la formación de los educadores de la ciudad, el Departamento y la región, con el convencimiento de contribuir así a la construcción de una nueva Colombia.

Andrés Felipe Velásquez Mosquera
Decano, Facultad de Ciencias de la Educación

Presentación

"Educar es depositar en cada hombre toda la obra humana que le ha antecedido, es hacer a cada hombre resumen del mundo viviente, hasta el día en que vive, es ponerlo a nivel de su tiempo para que flote sobre él y no dejarlo debajo de su tiempo, con lo que no podrá salir a flote, es preparar al hombre para la vida"
José Martí

Para el programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima, es un honor presentar a la comunidad académica el segundo número de la revista *EJES*. En esta revista se publicarán artículos sobre la Educación Matemática, la didáctica, la pedagogía, la investigación, las prácticas pedagógicas, el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas escolares, reflexiones sobre educación, las relaciones entre escuela, estudiante y profesor, entre otros elementos, que contribuyan a potencializar la aprehensión de conceptos matemáticos, dentro y fuera del aula.

La revista *EJES* se concibe como un espacio académico y de reflexión donde investigadores, profesores, graduados y estudiantes de nuestro programa y de otros con la misma denominación y afines puedan publicar y dar a conocer sus investigaciones, sus escritos, sus reflexiones, sus aportes a la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, que propendan a contribuir a mejorar las prácticas pedagógicas y el quehacer docente.

Es así, como esta segunda publicación cuenta con la participación de la comunidad educativa interesada en la Educación Matemática como es el programa de Licenciatura en Matemáticas de nuestra Alma Mater, de universidades nacionales como la Universidad Pedagógica Nacional, Universidad del Valle, Universidad de Nariño y la Universidad Nacional de Colombia.

Es grato contar con la participación de quienes compartieron sus ideas y dejaron sus escritos para la comunidad académica y para quienes sea de su interés. Es la oportunidad para invitar a quienes deseen compartir sus investigaciones, escritos y/o reflexiones en los próximos números de nuestra revista *EJES*, la revista del programa Licenciatura en Matemáticas.

Es así, como nuestro programa tiene una importante responsabilidad y un gran compromiso, puesto que es relevante que esta revista *EJES* de circulación anual, que se conserva hoy en su segunda versión, se perpetúe y evolucione en el trascurrir de los tiempos, proporcionando un espacio para la comunidad interesada en la formación de profesores en Educación Matemática.

Ovímer Gutiérrez Jiménez
Director
Licenciatura en Matemáticas

Si estoy cómodo, ¿por qué y para qué escribir en *Ejes*?

***Miguel Ernesto Villarraga Rico*[1]**

A mi mujer, mis hijas e hijo,
Ellos, mi motivo.

El presente artículo que he titulado "Si estoy cómodo ¿por qué y para qué escribir en *Ejes*?" está estructurado en tres apartados: 1º. La presencia de la escritura en una cultura, 2º. El acceso al ideal ilustrado kantiano y finalmente, 3º. La necesidad de una ubicación en los sistemas de referencia.

La presencia de la escritura en una cultura

Saussure concebía la escritura como el complemento de la forma de habla oral que contiene utilidad, defectos y peligros. Más recientemente la sociolingüística ha considerado que la escritura trae consigo cambios en las estructuras mentales de los humanos y por ende cambios sociales. Walter Ong ha considerado que la escritura ha venido transformando la conciencia humana, no solamente posibilitando el pensamiento en la escuela cuando se escribe, sino también cuando se articulan pensamientos de manera oral. Este autor considera también la escritura como una tecnología artificial, que paulatinamente ha resultado natural para el ser humano que posee una lengua hablada. Es decir, el habla es connatural al ser humano y la escritura se va transformando en natural en la medida en que se usa en la cotidianidad del ser humano. Como bien dijo Savater (1997) en su *Valor de Educar*: hablar con otro y escribir para otro, no solo es de humanos, sino que nos hace cada vez más humanos en esa necesidad natural de educar y ser educado.

Sin embargo Mockus et. al., desde 1987 ya venían anunciando el problema educativo que resultaría como producto de una adopción de la informática, sin antes haber interiorizado suficientemente en su vida social la escritura, por parte de los niños y niñas, jóvenes, estudiantes y profesores universitarios. Pues estos autores han afirmado que se requiere combinar escritura, discusión crítica y organización racional de la acción, para que se produzca una apropiación significativa del acervo cultural. Y, efectivamente la informática se nos impuso por los mercados como una necesidad creada por aquellos, sin que la escritura se hubiese cimentado suficientemente en los roles sociales de nuestra cultura colombiana y tolimense. Pues la tradición escrita no puede ser impuesta por norma, sino que deben ser creadas unas condiciones en el tiempo y el espacio, para que ésta se inserte con significado en la trama de acciones en la vida de los individuos de una sociedad. Hoy día, el problema de una informática sin escritura ha aumentado a niveles aún más críticos, porque sin que se hayan cimentado suficientemente las bases de una tradición escrita por parte de los niños, niñas, jóvenes de ambos sexos y estudiantes universitarios, con presencia de los computadores, se han adoptado, de manera obligada, nuevamente impuesta por el sistema capitalista con sus mercados, el mundo virtual de las redes sociales y los teléfonos móviles o celulares con servicios Whatsapp que aunque han modificado e incrementado unas particulares formas de escritura no pasan del nivel de una estética básica y superficial; pues resulta ser más una extensión de la oralidad con un "valor agregado" de función distractora, dispersante y superficial que atiende a lo cotidiano e inmediato; más que abordar y solucionar problemas relativos a conceptos y teorías en su relación con las prácticas educativas. Un nuevo problema para la educación, ¡como si no tuviéramos ya suficientes! La alegría que me produce este hecho es que hay otro problema para hacer investigación en el área y luego publicar los resultados.

El uso del lenguaje escrito implica conocimiento del lenguaje hablado y escrito, necesita un estado de conciencia superior sensible, para comunicar lo incomunicable o provocar en un lector los problemas de significado más inesperados; generando un diálogo intersubjetivo determinístico en unos casos y azaroso en otros. Pero en todos los casos se requiere tener un lenguaje disponible que permita no solamente poner por escrito ideas para comunicarlas a otros, sino que a su vez permita hacer visible las formas en que el escritor ha pre-estructurado su propia visión del mundo al pensar

[1] Candidato a Doctor en Didáctica de las Matemáticas. Profesor de planta, Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Tolima, Colombia; e-mail: mevillar@ut.edu.co

para escribir, pues como dicen Saphir y Worf (1956) “Los seres humanos no viven en el mundo objetivo ni el mundo de la actividad social como se piensa comúnmente, sino que más bien se encuentran a la merced del lenguaje particular, que se ha convertido en el medio de expresión de su sociedad”. Y, aunque Wittgenstein (1980) propuso el uso de un lenguaje formalizado para evitar malentendidos lingüísticos entre humanos, esto solo trajo otro problema como fue el poner límites a los pensamientos que se querían expresar; pues salió a flote el problema de que “los límites de nuestro lenguaje son los límites de nuestro mundo”; además el positivismo lógico advirtió que un lenguaje formalizado podría excluir algunas formulaciones y algunos conceptos podrían hacer falta o no poder ser expresados. Atendiendo a las Matemáticas, como nuestra disciplina de referencia en la Licenciatura en Matemáticas, surge la pregunta siguiente: ¿pueden las matemáticas, asumidas como un lenguaje formalizado, en las aulas de clase de nuestras instituciones educativas tolimenses pre-estructurar la visión del mundo de un estudiante y limitar y filtrar algunas formas de pensamiento? Incluso, ¿podrían impedir el acceso a algún tipo o forma de conocimiento?

Ya habiendo mostrado brevemente que se requiere de un lenguaje disponible, para establecer diálogos intersubjetivos entre humanos, de forma oral y escrita y que escribir tiene unas exigencias cognitivas distintas a las de la tradición oral, veamos una ventaja académica de poner por escrito las ideas.

El acceso al ideal ilustrado kantiano

Con el presupuesto kantiano (Kant, 1784): “si cada uno de los seres humanos posee su propio entendimiento entonces cada ser humano debe hacer uso de él sin temor alguno y sin pereza”; Kant nos increpa diciéndonos que “es cómodo ser menor de edad” pues en ese caso los libros piensan por nosotros, los tutores o profesores nos indican qué hacer, qué pensar y cómo pensar, los directores espirituales asumen nuestra conciencia moral, el médico nos dice qué comer; en definitiva si otro puede pensar por mí, ¿para qué voy a esforzarme en pensar por mí mismo, en usar mi propio entendimiento?

Arriesgaré aquí una hipótesis de trabajo: “En nuestra cultura no se ponen por escrito las ideas por miedo a la equivocación, al ridículo y porque es más cómodo no hacerlo”. Cuesta validar esta hipótesis, pero expresa una realidad que no requiere de mucho esfuerzo para ser ilustrada; pues esta hipótesis de una “minoría de edad” ha sido asumida como tesis, para poner rumbo a su vida académica, por amplias mayorías en la actualidad.

Entonces, ¿cómo salir de esa minoría de edad? Kant responde: “haciendo un libre uso público de la propia razón”. Vale aquí precisar que esta respuesta kantiana no incluye exactamente el formarse en competencias para hacerse visible en los mercados, compitiendo contra otros de manera egoísta, ni incluye escribir en revistas de altísimo ranking para intereses particulares del autor y de los dueños de los sitios de publicación de pago, ni incluye cumplir “indicadores de calidad y visibilización” ni nada de esos inventos de los mercados actuales. Kant entiende el uso público de la razón como “aquél que alguien hace de ella en cuanto docto (Gelehrter) ante el gran público del mundo de los lectores” mediante escritos, usando su propio entendimiento, razonando por sí mismo aunque sea para oponerse a las inconveniencias y a las injusticias y proponiendo mejoras y cambios necesarios.

Con lo dicho anteriormente entonces ningún ser humano debería admitir la imposición de normas que limiten su pensamiento y que tengan como fin último mantenerlo en una minoría de edad, desde luego, dentro de un respeto a los valores que impidan atentar contra otro ser humano y contra el contexto medio-ambiental y que garanticen la supervivencia de los seres humanos y su legado cultural. El ser humano debería proponerse por iniciativa propia tener por principio hacer un libre uso público de la razón, poniendo por escrito las ideas para que otros las lean y puedan interactuar también por escrito con el autor inicial, para que otros validen o refuten con argumentos las ideas que están allí hechas públicas. En otras palabras la invitación es a publicar las ideas, pensamientos, razonamientos, argumentaciones, refutaciones, ejemplos, contraejemplos, y todos los conocimientos producidos por las diversas formas de la mente (Korner, 1977, 1984) en sitios académicos públicos, como lo es esta revista ***EJES*** de la Licenciatura en Matemáticas, que hoy lanza su primer número con humildad, en su valía en tiempos de “redes sociales” y “nubes informáticas” atractivas, pero poco válidas. Para publicar en ***EJES*** se requiere por un lado un uso adecuado del lenguaje escrito y eliminar la hipótesis arriba mencionada, es decir eliminar la pereza y el miedo a la equivocación, al ridículo, empleando argumentos válidos en la comunidad académica de la Educación Matemática y eliminando la falsa comodidad del oportunismo y la recepción de sugerencias e incluso órdenes sobre cómo, qué y cuándo pensar o dejar de hacerlo.

Y si alguien se decide a hacer uso de su mayoría de edad en sentido kantiano y a publicar en ***EJES***, ¿Qué podría publicar allí?

La necesidad de una ubicación en los sistemas de referencia

Para responder a la anterior pregunta empecemos por la nominación. En nuestra vida, los humanos nacidos biológicamente humanos nos hacemos socialmente humanos paulatinamente a partir del contacto con el otro (Savater, 1997) como seres eminentemente sociales. Cada ser humano tiene su proyecto de vida inscrito en un sistema de referencia, el más básico, pero a su vez general, es el sistema de referencia cuyas coordenadas están dadas por el espacio y el tiempo. Cada ser humano tiene su espacio vital su espacio donde se desempeña y cada evento que realiza lo hace en un tiempo determinado. Se puede decir que cada ser humano vive su vida en un espacio y tiempo determinados, pero cada espacio-tiempo de un sujeto particular es relativo a él, sus concepciones y sus circunstancias; por lo que cada humano podría definir su sistema de referencia aleatoriamente, pero lo importante, como diría Einstein en su teoría general de la relatividad, es que el sistema de referencia con respecto al cual se pueden referir los eventos que se suceden esté bien determinado y que si se cambia de sistema de referencia los eventos se puedan interpretar mediante una transformación adecuada entre el antiguo y el nuevo sistema de referencia. Así, los ejes de coordenadas espacio-tiempo en movimiento, permiten a cada uno de nosotros describir su historia de vida en su geografía particular. Descartes (1925) hizo algo semejante al idear el plano cartesiano mediante dos ejes perpendiculares de números reales, pues creó un espacio de RxR en el cual cada habitante del plano estaba totalmente identificado por su ubicación mediante la pareja ordenada (x, y) de manera inequívoca; hacer álgebra en el espacio vectorial R2 fue entonces relativamente fácil, permitiendo combinar el álgebra con la geometría, lo que significó un avance notable en las matemáticas al tener funcionalmente dos ejes coordenados colocados de manera perpendicular.

Ahora bien, si quisiéramos analizar la interrelación entre marcos conceptuales, marcos teóricos, marcos metodológicos, en investigación y prácticas en Educación Matemática, los podríamos colocar como elementos distribuidos adecuadamente en ejes coordenados de manera que cada estudio que se realice quede ubicado de manera inequívoca en unas coordenadas propias; tendríamos así la oportunidad de centrarnos en un estudio puntual en una de las problemáticas relativas a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas incluyendo la formación de maestros de matemáticas. Así pues, una vez que se avance o terminen estudios, se aborden problemáticas, se generen ideas novedosas, se hagan meta-análisis, se desee referenciar una obra, se construyan ideas para el aula de matemáticas, se diseñen unidades didácticas de matemáticas, se realicen pruebas piloto y se obtengan unos resultados bajo análisis, etc., se debería tener claro que los resultados de todas y cada una de tales tareas nos hacen más humanos si los compartimos haciendo uso de nuestra mayoría de edad, en el sentido kantiano, y una forma es poniéndolos por medio de un lenguaje escrito en nuestra revista ***EJES***, compuesta por reflexiones y estudios en Educación Matemática. Esta tipología de estudios está bien documentada en los Handbook del área como Grouws (1992), Clements, et. al. (2103) entre otros textos.

Cuando publiquemos en ***EJES***, nuestro sistema de referencia será la Educación Matemática, haciendo públicos nuestros estudios y reflexiones argumentadas mediante un lenguaje escrito. Esto quizá llegue a posibilitar que un ejemplar sea desenterrado por los arqueólogos del año 4014 y sea codiciada cada hoja escrita, guardando las proporciones, como un Paphiro de Rhind o un Papiro de Moscú (Boyer, 2010).

Invitados pues todos y todas a hacer un libre uso público de la razón, a hacer historia.

Muchas gracias.

Referencias

Boyer, C. (2010). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Clements, M. .Bishop, A., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Leung, F. (Eds.) (2013). *Third International Handbook of Mathematics Education*. Ny.: Springer.

Descartes, R. (1925). *The Geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition.* NY.: Dover Publications.

Kant, I. (1784). Respuesta a la pregunta: ¿Qué es la ilustración? Recuperado de Internet http://geografiaunal.files.wordpress.com/2013/01/kant_ilustracion.pdf

Körner, S. (1977). *Introducción a la filosofía de la matemática.* México: Siglo XXI editores.

Körner, S. (1984). *Cuestiones fundamentales de filosofía.* Barcelona: Ariel.

Mockus, A., Hernández, C. Granés, J., Charum, J. y Castro, M. (1999). ¿Informática sin escritura? El problema para la educación. 25-51 . En F. Jurado y G. Bustamante, *Los procesos de Escritura. Hacia la producción interactiva de los sentidos.* Bogotá: Magisterio.

Ong, W. (1994). *Oralidad y Escritura. Tecnologías de la palabra*. Bogotá: Fondo de Cultura Económica.

Saphir,, E. (1929). *The status of linguistics as a science*. Language 5. 207-214.

Savater, F. (1997). *El valor de Educar*. Barcelona: Ariel

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica*. Bogotá: Una empresa Docente Universidad de Los Andes.

Wittgenstein, L. (1980). *Tractatus Logico-Philosophicus.* Madrid: Alianza Editorial

El desarrollo del pensamiento pedagógico en las Facultades de Educación

Bernarda Elisa Pupiales Rueda[1]
Dorothy Pupiales Rueda[2]

"El profesor, como facilitador, se responsabiliza de crear las condiciones conducentes al diálogo crítico reflexivo hasta que los alumnos se familiaricen con el proceso. Cuando los estudiantes llegan a conocerlo bien, el profesor no sólo puede dejarles que analicen críticamente el material que tengan entre manos, sino también que empiecen a reflexionar sobre el procedimiento mediante el cual estén aprendiendo".
Brockbankk y McGill (2002)

Resumen. El artículo identifica los aspectos claves que intervienen en la formación del pensamiento pedagógico en los programas de formación universitaria. Para lo cual se analiza la percepción de los docentes universitarios, y de los egresados de los programas formadores de docentes. Para identificar este tipo de orientación fue necesario realizar el análisis de documentos emanados por las universidades y por el Ministerio de Educación. Para lograr la información se aplicaron encuestas a docentes universitarios de tres universidades de la región[3], además se analizaron historias de vida escritas por los docentes OPS, de la ciudad de San Juan de Pasto, Colombia.

El artículo da cuenta de cómo y a través de qué estrategias se desarrolla o fortalece el pensamiento pedagógico, de igual manera sobre el porqué escogieron la carrera docente, cómo fueron los primeros acercamientos a la docencia, y en qué medida dicha formación incide en la calidad de la educación superior, a partir del desempeño docente al interior del aula.

Palabras clave: saber, ciencia, calidad, pedagogía, reflexión.

Abstract. The article takes us to the key issues involved in the formation of educational thought of the graduates of university training programs, which analyzes the perception of the area by university lecturers, teachers and graduates of teacher trainers programs, the latest at the time were employed as OPS teachers. To identify this type of orientation was necessary to perform the analysis of documents issued at the time by the universities and the Ministry of Education. To obtain such information surveys were applied to university teachers from three universities in the region and analyzed life stories written by OPS teachers from the city of San Juan de Pasto, Colombia. The article gives an account of the teaching profession they chose, how they were the first approaches to teaching, and to what extent such training affects the performance of the profession within the classroom.

Glosario
OCDE: Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico
UNESCO: Organización de la Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura.
OPS: Profesores nombrados por el Ministerio de Educación Nacional con Resolución 540 del 31 de diciembre de 2003.

Introducción

En el artículo se ponen en consideración los aspectos que hacen posible la construcción del conocimiento pedagógico de los y las docentes, y se lleva a cabo a partir del análisis de los currículos de los programas formadores de docentes de tres instituciones de Educación Superior ubicadas en el sur occidente colombiano, entre las que se encuentran la Universidad de Nariño, la Universidad Javeriana y la Universidad Mariana. Se decidió aplicar el estudio en estas universidades ya que tenían programas formadores de docentes con una trayectoria significativa en el ámbito.

El estudio centra el análisis en las acciones, actividades, decisiones, marcos de referencia

[1] PhD. Ciencias de la Educación - Universidad Complutense de Madrid - España. Postdoctorada - Universidad de Lisboa - Portugal. Profesora, Departamento de Psicopedagogía, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima, Colombia; e-mail: bepupialesr@ut.edu.co
[2] Especialista en Desarrollo Humano. Academia Nariñense de Historia. Docente Universidad de Nariño. Instructora para docentes de Primera Infancia SENA- Regional Nariño, Nariño, Colombia.
[3] Universidad de Nariño, Universidad Javeriana y Universidad Mariana

y perfiles que conllevan a la construcción del concepto. En este caso el pensamiento pedagógico, en el momento del estudio, constituía el cincuenta por ciento del saber impartido en el proceso formativo de los licenciados en los diversos ámbitos del saber, lo cual inició con la promulgación del Decreto 272 de 1998, el cual consagró la pedagogía como disciplina fundante de las Facultades de Educación a nivel nacional. Se aplicaron encuestas a 42 docentes universitarios de los cuales 14 se desempeñaban en su momento como docentes de tiempo completo, adscritos a las siguientes categorías del escalafón; seis docentes Titulares, cuatro docentes con categoría de Asociados, once con categoría de Asistentes, y ocho docentes con categoría de Auxiliares; laboraban como formadores de formadores al interior de las facultades formadoras de docentes. Con docentes OPS, se realizó escritura de historia de vida, a setenta y cinco docentes OPS. Se escogieron estos dos grupos por ser ellos los actores principales del ámbito en mención.

En este caso tanto los docentes universitarios, como los docentes OPS imparten, infieren, planean, ejecutan procesos y acciones educativas, las cuales son susceptibles de ser evaluadas y analizadas desde diversos aspectos. Cabe anotar que en el presente artículo se encuentran consignados algunos de los referentes conceptuales, que dieron sustento a dos de los capítulos de la tesis doctoral, sin embargo el intentar resumirlos en un artículo es un proceso que conlleva un acucioso trabajo para presentar aquello relevante en el ámbito en estudio, que de una u otra manera conlleva a reflexionar, sobre las posibilidades de mejora del ámbito en mención. *"La didáctica la entiendo como diversas estrategias para abordar las asignaturas"*. Testimonio Docente OPS.

Metodología

Se aplicó una metodología de corte cualitativo. Las etapas o fases fueron: el análisis de los currículos de dichos programas, se identificaron los parámetros que postula el Ministerio de Educación, para dicha formación, y en tercer lugar se llevó a cabo el trabajo de campo en el cual se indagó sobre los aspectos más relevantes de la formación del profesorado, además de la incidencia de dicha formación en el desempeño docente, y finalmente se realizó la triangulación de los resultados. En este caso se aplicó un método múltiple, que según Goetz y LeCompte (1984) al igual que el topógrafo localiza los puntos de un mapa realizando triangulaciones con las diversas miras de instrumentos, el etnógrafo determina la exactitud de sus conclusiones efectuando triangulaciones con varias fuentes de datos Goetz y LeCompte, (1984, pág. 36).

La indagación fue acerca de la percepción que, sobre dicha formación, tienen los profesores universitarios y los docentes OPS, quienes se denominan así, porque fueron nombrados por el Ministerio de Educación en virtud del artículo 38 de la ley 715 de 2001.

La formación profesional de Licenciados y el pensamiento pedagógico

> *Conviene no olvidar que de la calidad de la enseñanza universitaria dependen muchas cosas y todas ellas importantes. La propia excelencia humana está puesta en juego en ella y, por consiguiente, el futuro –también el próximo- de las personas y de la entera sociedad.*
>
> Polaino Lorente A. (2006)

La formación profesional debe integrar los saberes desde diversas ópticas, un docente no es únicamente quien planifica e imparte la asignatura, es en suma un pensador de la misma, de los procesos que conllevan a la motivación de los estudiantes por aprender y lograr un conocimiento profundo y de indagación permanente. En esta medida la formación de los profesionales debe construir pensamiento pedagógico. Gimeno S, (2008, pág. 76) "el aprendizaje como indagación y la creatividad acompañada de la crítica se erigen como las competencias claves del ciudadano para poder afrontar la incertidumbre y la supercomplejidad de su contexto". El pensamiento pedagógico debe orientar al estudiante a ser creativo, y a prever los grupos heterogéneos en múltiples sentidos cuyas formas de aprender también son diversas.

> *El docente debe mirar su profesión como una verdadera misión, pero sobre todo, es una vocación a la que fuimos llamados y es la de servicio desinteresado a una comunidad y a los niños principalmente quienes son el centro del proceso educativo.* Docente OPS.

Sobre el concepto de docente universitario, UNESCO propone que debería ser una especie de pedagogo profesional, es decir con una amplia gama de conocimientos científicos, específicos, pedagógicos, éticos, tecnológicos y estéticos. Freire (1996), asume como necesario lograr la autenticidad en la profesión docente, y ésta, se percibe a través de una experiencia total, directa, política, ideológica, gnoseológica, pedagógica, estética y ética. Un profesional de la educación que sale del aula, y busca entornos que estimulen el aprendizaje. Docente OPS. El pensamiento de los docentes universitarios es determinante en los procesos de formación profesional, ya que son ellos quienes planean las acciones pedagógicas y enseñan, a través de ellas, y obviamente en cada actuación pedagógica reivindican o distorsionan el concepto pedagógico. Para Shön (1998), "es necesario ofrecer espacios para alcanzar desde una propuesta planificada, y secuencial una formación in situ, capaz de motivar el desarrollo de nuevas formas para acceder a ella". Shön (1998, pág. 65).

En este aspecto no es suficiente la intervención educativa a partir de la aplicación de métodos y modelos es necesario cuestionarse ¿cómo aprenden los estudiantes?, y resolver el interrogante en la intervención pedagógica de cada asignatura, de igual manera a través de diversos modelos de intervención y sistemas de evaluación, los cuales deben ser contrastados a partir de diversas ópticas y validados en la práctica. La importancia de este modelo de aproximación constituye una condición básica para la mejora de la enseñanza. Únicamente en la medida en que los profesionales lleguen a conocer más sobre el trabajo que hacen y la función que desempeñan tanto social como científicamente, estarán en condiciones de propiciar los ajustes pertinentes para lograr la calidad académica requerida.

La formación de científicos es también una responsabilidad de la escuela, ella proporciona la motivación para acercar o alejar a niños, niñas, jóvenes y adultos al ámbito de la investigación y/o el conocimiento. De los mencionados procesos formativos depende que un buen número de seres logren insertarse y motivarse por la ciencia, el arte o la filosofía. En el ámbito educativo todo proceso formativo lleva implícitas concepciones y formas de pensar que identifican la ideología, que puede ser institucional o del o la docente, y a ella responden gran cantidad de acciones planificadas para perpetuar tanto el pensamiento pedagógico como la intervención educativa de quien la imparte.

Para Zabalza (2003, pág. 123), "la enseñanza, en tanto que actividad profesional, posee su propia lógica e impone sus condiciones. No todo vale en la enseñanza". La praxis de la formación es un concepto real en el contexto, y deberá motivar la búsqueda de soluciones a partir de una perspectiva interdisciplinaria, que involucre la interacción entre lo científico, social, cultural y económico. No es lo mismo planear ejemplos de casos para plantear soluciones, la experiencia desde y a partir de la observación y hacia la acción, es formativa desde todo punto de vista.

> *"La función de la escuela requiere una comunidad de vida, de participación democrática, de búsqueda intelectual, de diálogo y aprendizaje compartido, de discusión abierta sobre la bondad y sentido antropológico de los influjos inevitables del proceso de socialización. Una comunidad educativa que rompa las absurdas barreras artificiales entre la Escuela y la sociedad".* Pérez Gómez (1999).

Conclusiones del Estudio Etnográfico de los Docentes OPS

El resultado del estudio del grupo de docentes OPS, dejó entrever algunos rasgos que suscitan las siguientes conclusiones; los docentes OPS, provienen del sector económico bajo y medio bajo, "-en general provienen de hogares con marcadas dificultades económicas". En cuanto a los motivos para escoger la profesión docente se encuentran: la tradición familiar, el bajo puntaje en las pruebas de Estado ICFES, la vocacionalidad, la posibilidad de dedicación de medio tiempo, la que se compagina con otros trabajos realizados en jornada contraria a la cual se desempeñan en las instituciones educativas. En cuanto a uno de los motivos para decantarse por la carrera docente fue, que el puntaje exigido por las carreras de formación docente se considera medio bajo con respecto a la escala de puntuación que se exige para acceder a las otras carreras profesionales, así, acceder a un programa de formación docente es una opción viable. Cabe anotar que, quienes escogieron la profesión docente motivados por la vocación de servicio, esta inclinación se identificó a temprana edad, los docentes relatan que esta inclinación se dejaba entrever en los juegos de infancia. Otro de los aspectos que les llevó a optar por la carrera docente fue el hecho de contar con una escuela normal cerca del lugar de vivienda, de esta manera el bachillerato normalista se convirtió en una posibilidad de estudio viable y económico. "Siempre tuve maestros que me enseñaron con entrega, y también aprendí a ser recursivo y a realizar un trabajo con compromiso". Docente OPS.

En cuanto al grupo que escoge la docencia por tradición familiar; un familiar cercano o poco lejano fue o es docente, entonces motivados por esta tradición deciden acceder a la profesión docente. Para quienes escogen la profesión luego de haber obtenido un bajo puntaje de ICFES, esta opción se relaciona con la falta de motivación por capacitarse, y no están motivados por realizar estudios de postgrado. En cuanto a los relatos y descripciones de hechos que testimonian el complejo entorno que rodea el ámbito del desempeño docente de los docentes OPS, estos dejan entrever hechos en los cuales se vieron implicados en procesos de paz, siendo designados para servir de voceros y lograr diálogos entre el alcalde, y algún grupo insurgente. Igualmente se encuentran quienes han sido líderes comunales y gremiales, son múltiples los casos de maestros que sienten orgullo y satisfacción porque el trabajo fue más allá de los muros, de las aulas y del patio de la escuela.

De otro lado, en cuanto al análisis de las metas, los sueños de los docentes OPS, se debaten entre el ser y el tener, sin embargo, es considerable el porcentaje de docentes que evidencian permanente interés en mejorar, tanto en el ámbito personal como profesional; entre los aspectos que desean mejorar es acceder a la investigación, a la lectura y a la escritura, entre otros. Es interesante identificar cómo se produjo la experiencia docente inicial. Entre las respuestas encontramos que algunos docentes lo fueron por el azar y otros lograron el trabajo por tener amistad con el grupo político al cual pertenece el Secretario de Educación y/o el jefe de personal de su localidad. En cuanto a los proyectos futuros se evidencia inquietud frente al futuro profesional; expresan descontento permanente por las múltiples formas de discriminación a las que han sido avocados al no tener los mismos derechos que los docentes de planta. Sin embargo y no obstante las dificultades, continuaban con la tarea de cualificarse con miras a la evaluación de competencias la cual se llevaría a cabo por el Ministerio de Educación en el año subsiguiente a la investigación 2006, para optar por una plaza o contrato indefinido. "Para pagar un postgrado se debe invertir diez o doce salarios mínimos, y ya no estamos en condiciones de hacerlo". Docente OPS.

Y finalmente, los recuerdos de la escuela en la infancia de los docentes dejan percibir haberse formado a través de una pedagogía tradicional, en la cual fueron objeto de castigos físicos, y psicológicos tanto en la educación básica, el bachillerato y la universidad. En este caso el docente es protagonista de la historia como estudiante y como docente OPS. En conclusión la historia personal descifra gran parte de las concepciones que han llevado a considerar la docencia como una posibilidad laboral y profesional, ya sea por vocación o como medio de subsistencia. Sin embargo, es paradójico, cómo y a pesar de las circunstancias que rodean el desempeño de dicha profesión, ya sea por las dificultades económicas, por el trato discriminatorio que reciben, o por las dificultades que encuentran en el desplazamiento a las zonas de trabajo identificada como zonas de conflicto y de difícil acceso, para un 90% de los docentes del grupo la profesión continuaba siendo una actividad humana e interesante, que demanda compromiso y entrega.

A continuación se lleva a cabo el análisis del resultado de las encuestas realizadas a docentes universitarios quienes se desempeñaban en su momento como docentes de los procesos de formación al interior de las facultades de educación.

Análisis de la información obtenida a partir de la aplicación de encuestas a docentes de las Facultades de Educación

En la indagación se encuentra que de los 42 docentes encuestados, 12 poseen título de Maestría, l6 título de Especialización en un área del conocimiento afín al programa en el cual laboraba, 10 docentes eran licenciados, uno es doctor y otro próximo a terminar estudios de doctorado.

La epistemología, como principal centro de interés en la formación de formadores. En cuanto a la importancia de los centros de interés, encontramos la siguiente escala: la epistemología de la pedagogía, el saber específico, el saber pedagógico, la investigación y la práctica pedagógica. *Hay muchas formas para acercarnos a las tendencias y modelos pedagógicos nuevos, pero no nos inducen a investigar.* Docente OPS.

La construcción del perfil base de la Cultura Profesional docente. En cuanto a construir la cultura profesional, los docentes universitarios proponen que el estudiante debe recibir formación para ser crítico, para percibir la realidad de la escuela a partir de una visión integral, conocedor y creador de nuevas estrategias pedagógicas, investigador y con formación política e ideológica, con capacidad para someter a prueba sus decisiones, sensible frente a los fenómenos del contexto educativo, conocedor del saber específico, creativo, recursivo e innovador, conocedor de metodologías propias de la disciplina en la cual se forma, humano y comprometido con la labor docente, reflexivo y transformador, que demuestre en la intervención la vocación de servicio.

Aspectos propuestos en torno a la transformación del proceso. Entre los aspectos a transformar al interior de los programas proponen: orientar en pedagogías lúdicas acordes con las necesidades de la pedagogía para dicha etapa, puesto que el niño aborda y afianza con mayor facilidad el conocimiento a través del juego-trabajo, la orientación en modelos pedagógicos para el desarrollo de habilidades sociales, y profundizar en la epistemología del saber específico.

Conocer la visión y misión de los programas a intervenir. Los docentes universitarios proponen lograr claridad en cuanto a la misión formativa, ya que un 70% de los docentes de universidad desconocen los propósitos de formación de los programas en los cuales imparten clase. Ellos se limitan a planificar, desarrollar y evaluar la asignatura de acuerdo a los conocimientos impartidos en ella, y no tiene en cuenta el perfil, la visión y misión del programa.

La práctica docente como base de una adecuada formación docente. Proponen que la práctica docente se convierta en un espacio no sólo para orientar a los estudiantes en cuanto al desempeño docente, sino que también que sea investigativa, es decir que en ella se perciba un proceso secuencial de búsqueda de soluciones a los fenómenos educativos en los diversos ámbitos del saber. Y como aspecto importante en este espacio de formación proponen el fortalecimiento de la competencia lecto-escritora. *Sobre la práctica pedagógica, la realidad es una, y la teoría que nos enseñan no tiene relación con la realidad".* Docente OPS.

Profundizar en las estrategias pedagógicas de cada saber. En cuanto a la formación pedagógica, un 60%, de los docentes hace las siguientes recomendaciones: *es necesario profundizar en las estrategias metodológicas de cada saber. Proponer una asignatura para la intervención en el aula con niños y niñas con necesidades educativas especiales (inclusión educativa). Que la formación pedagógica impartida al interior de las facultades continúe siendo un referente que anime a continuar en la búsqueda de la calidad.*

Hacia una mayor producción escrita de los docentes. En cuanto a la orientación de la formación, un 15% de los docentes afirma que dicha formación se parcializa en lo cognitivo. Un 10% de los docentes afirma que las estrategias de acompañamiento son adecuadas, lo identifican porque en el proceso se afianza el conocimiento de investigadores, autores, y modelos pedagógicos.

Hacia el fortalecimiento de competencias profesionales docentes. Los docentes universitarios recomiendan que se debe crear espacios para afianzar el compromiso social, proponen formación para mejorar las relaciones interpersonales y el manejo del conflicto, tanto en el aula como en la institución en general. Los formadores de formadores perciben como fortaleza del programa, la pertinencia académica y la pertenencia social del currículo. Un 60% de los docentes percibe un buen nivel de formación de los docentes que trabajan al interior de los programas. Se identificó que una de las fortalezas en la licenciatura en "Inglés", es que el docente tiene la opción de desempeñarse dentro del país y también a nivel internacional. *"Los desplazados necesitan una pedagogía de afecto, para socializarse, más que para aprender conocimientos en otras áreas, y no sé cómo se aborda este aspecto".* Docente OPS.

La ética, como responsabilidad y compromiso con la investigación. Para dichos docentes la formación ética es trascendental e identifican que un docente con ética es responsable, prepara clases, es investigador tanto del saber pedagógico y específico.

La relación teoría-práctica como el Saber y el Hacer en contexto. Es importante lograr la relación entre el saber y el saber hacer, o entre teoría-práctica, y proponen fortalecer la formación humanística, como una competencia trascendental en el proceso.

Fortalecer adecuados procesos de comunicación pedagógica. El fortalecimiento de los procesos de comunicación como base de la dinámica educativa. Y formar así, al profesional de la educación para ser investigador en el aula, además para que sea un transformador del entorno educativo en el cual desarrolla la intervención docente.

Conclusiones

–La formación del profesorado, deberá asumir una posición crítica, de las formas y modelos mediante los cuales forma y construye el conocimiento pedagógico de las nuevas generaciones de profesores. Es necesario que el pensamiento pedagógico sea el resultado de un proceso dinámico, basado en la investigación, que busque crear y recrear contextos pedagógicos, y que además estimule hacia la mejora de la calidad de la Educación a través de una práctica educativa coherente entre las necesidades de la escuela, y el desarrollo de competencias profesionales.

-La formación de docentes debe construir el puente entre el estudiante y el entorno social y el científico. La escuela, después del hogar es el sitio por antonomasia en donde se identifican y se exploran las múltiples inteligencias que luego se convertirán en la base de la orientación vocacional o profesional del individuo.

-La formación del docente deberá fortalecer una perspectiva de inclusión educativa, en la cual tengan cabida todos y todas, sin lugar a discriminación alguna, ya sea por razón de raza, sexo, lengua, etc.

-La práctica pedagógica pilar de la formación, a través de ella los estudiantes aprenden, intervienen, reflexionan, investigan, toman decisiones sobre el quehacer educativo, por lo tanto debe iniciar desde el primer semestre y ser integral e investigativa.

-En el evento de construir una cultura profesional se deben construir currículos que respondan a las necesidades del entorno económico, cultural y científico.

-A partir de la cultura profesional docente, se debe fortalecer la capacidad de reflexión y acción pedagógica y convertir la docencia en una posibilidad para construir y proponer teorías y modelos educativos resultado de procesos de investigación.

-La intervención pedagógica debe orientar al estudiante a crear conciencia y fomentar la relación contexto educativo y cultura profesional, como resultado de la reciprocidad que existe entre la percepción sociológica del ámbito educativo para el cual se planifica el proceso de formación.

-Es acuciante pensar la docencia desde la categoría del profesor educador. Y es que la realidad del ámbito educativo, para una gran cantidad de docentes se ha convertido en un espacio para la mera transmisión y la repetición de modelos, teorías y propuestas, lejos de la innovación, la investigación.

-Es necesario que los programas cumplan con los parámetros de pertenencia social, la cual hace referencia a las exigencias de arraigo, identidad y compromiso de todos y cada uno de los involucrados en el proyecto educativo, y también pertinencia académica entendida como la relación existente entre el currículo, los fines educativos y las necesidades del medio.

Referencias

Alberci, A y Serreri, P. (2005). *Competencias y formación en la edad adulta. El balance de competencias.* Barcelona: Laertes.

Brockbank, A y Mcgill, Ian (2002). *Aprendizaje reflexivo en la educación superior.* Madrid: Morata.

Gimeno P. y Otros (2008). *Educar por competencias, ¿qué hay de nuevo?* Madrid: Morata.

Goetz, J., y Lecompte, D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Madrid: Morata.

INFORME OCDE (1998). *Implantación de la educación permanente.* Madrid: Santillana.

MEN (1992). *Ley 30 de 1992.* Bogotá: MEN.

MEN (1994). *Ley general de educación.* Bogotá: MEN.

MEN (1997). *Decreto 3012 de 1997. Por el cual se adoptan disposiciones para la organización y funcionamiento de las escuelas normales superiores.* Bogotá: MEN.

MEN (1998). *Decreto 272 del 11 de febrero de 1998.* Bogotá: MEN.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1990). *Ley Orgánica General del Sistema Educativo.* Madrid: MEC.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1995). *Sistema Educativo Español*. Madrid: MEG- CIDE.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1996). *Ley Orgánica de la Participación, la evaluación y el gobierno de los centros Docentes*. Madrid: MEC.

MINSITERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1994). *Centros Educativos y calidad de las Enseñanza. Propuesta del actuación*. Madrid: MEC.

Shön, D. (1992). *La formación de profesionales reflexivos. Hacía un nuevo diseño de la enseñanza en las profesiones*. Barcelona: Paidós.

Shön, D. (1998). *El Profesional reflexivo. Cómo piensan los profesionales reflexivos cuando actúan*. Barcelona: Paidós.

Shön, D. (1983). *The reflective practitioner. How professionals think in action.* Lodon: Temple Smith.

Silvero M. (2006). *Motivación y calidad docente en la Universidad*. Navarra: Universidad de Navarra.

UNESCO (1995). *Informe de la Comisión Internacional sobre Educación para el siglo XXI*. París.

UNESCO (1996). *La educación encierra un tesoro*. (Publicado como Informe Delors). Madrid: Santillana.

UNESCO (2001a). *XI Conferencia Iberoamericana de Educación*. Valencia.

UNESCO (2001b). *Declaración de Cochabamba*. Cochabamba.

UNESCO (2001c). *Conferencias iberoamericanas de educación*. La Habana, Panamá y Valencia: UNESCO.

UNESCO-UNICEF. (1996). *La educación preescolar y básica en América Latina y el Caribe.* Santiago de Chile: Unesco-Unicef.

Zabalza, M. (1987). *Diseño y desarrollo curricular.* Madrid: Narcea.

Zabalza, M. (2003). *Competencias docentes del profesorado universitario. Calidad y desarrollo profesional*. Madrid: Narcea.

Una aproximación de la evolución y construcción del Modelo Curricular de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad del Tolima

Diego Ricardo Rojas Cuéllar [1]
Ovímer Gutiérrez Jiménez[2]

A manera de introducción

Durante los últimos años, la Universidad del Tolima y sus principales actores se han visto irremediablemente involucrados en una serie de críticas pedagógicas, sociales, políticas, culturales y administrativas, que para beneficio de todos han puesto a replantear la actividad formadora de docentes y estudiantes. De ahí que los procesos de mejoramiento de la calidad exijan nuevos modelos de gestión y organización institucional tanto en los procesos administrativos como los académicos. Si bien, hoy nos queda claro que las fallas de los profesores de la universidad van desde el autoritarismo, el centralismo y la idea absurda de que su principal función es transmitir conocimientos, preguntas y respuestas correctas, más que asegurar la comprensión y aplicación o uso activo del conocimiento, los profesores deben mostrase como personas capaces de acoplarse al contexto del cambio generacional y expresar que sus prácticas son significativas.

> "*en algunos casos existe coherencia entre las prácticas y las concepciones que las sustentan, pero en otros casos se puede encontrar contradicciones e incoherencias entre unas y otras. Los estudios realizados en la enseñanza de las ciencias muestran la necesidad de cuestionar y modificar las concepciones que los docentes tienen acerca de cómo aprenden los alumnos y cuál es la naturaleza del conocimiento científico pues muchas de ellas presentan distorsiones y deformaciones que pueden convertirse en obstáculos para la enseñanza y para la implementación de currículos innovadores"*[3] *(Guzmán, Quimbayo, 2013, p 92)*

También es cierto, que discretamente ha crecido en forma desmedida una tendencia entre los educadores de sobrevalorar el aprendizaje, y esto ha provocado una serie de problemáticas tanto en la actualización de la capacitación y recursos docentes, como en la metodología didáctica a implementar en los salones de clase, debido a la no actualización del mismo.

Modelo Pedagógico y Curricular

Con la abundante producción escrita frente a la pedagogía y la conformación y delimitación de los modelos pedagógicos, resulta urgente categorizarlos para poder incorporarlos al discurso y práctica de los profesores de la Universidad del Tolima, específicamente en la Facultad de Ciencias de la Educación; esto permitirá conocer detalladamente la evolución de la historia de la Facultad y la construcción del modelo curricular como un conjunto coherente de planteamientos desde donde se explique en forma sistemática, los procesos de información, enseñanza, aprendizaje y educación.

En este sentido, y siguiendo la tradición socrática que sugiere definir los términos involucrados antes de iniciar cualquier discusión, es necesario establecer las diferencias y límites entre los conceptos de "modelo curricular" y "políticas curriculares" para que funcione como un marco referencial con el propósito de rastrear y analizar a detalle su historia en la Facultad de Ciencias de la Educación y sus implicaciones en los programas que la conforman; también para identificar cuáles son los paradigmas que sustentan actualmente un modelo o que los sustentaron en su momento, es decir conocer la esencia de la historia de la Facultad de Ciencias de la Educación, a través de la respuesta de preguntas como: ¿cuál es la diferencia entre modelo curricular y modelo pedagógico?; ¿Cómo se ha construido el modelo pedagógico de la Facultad?; ¿qué factores han incidido en la construcción de un modelo curricular en la Facultad?

---

[1] Licenciado en Matemáticas. Estudiante de Maestría en Educación, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima, Colombia; e-mail: drrojasc@ut.edu.co

[2] Licenciado en Matemáticas, Universidad del Tolima. Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia. Director del Programa de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima, Colombia; e-mail: ogutierrezji@ut.edu.co

[3] Guzmán O., G. y Quimbayo V., C. A. (2013). *Estilos pedagógicos de profesores universitarios, estudio de caso en la Universidad del Tolima, Ibagué.*

Para comenzar la noción de modelo pedagógico ha sido una construcción histórica que no ha tenido una definición única y cuya comprensión ha estado vinculada a las teorías o enfoques de los pedagogos, "*el Modelo Pedagógico es considerado como un constructo teórico, que a partir de supuestos científicos e ideológicos pretende interpretar la realidad educativa y dirigirla hacia unos determinados fines pedagógicos"*[4]; en este sentido, es necesario distinguir las teorías y enfoques que han contribuido a la estructuración de los procesos formativos y educativos del hombre a través de la historia, pues en ella se han presentado interrogantes de carácter filosófico, político, pedagógico, económico, científico, cultural, entre otros. La elaboración de un modelo pedagógico en la Universidad del Tolima es percibido mediante la observación de las prácticas docentes como una construcción holística que define Ianfrancesco (2012), como "*una tendencia o corriente que analiza los modelos desde el punto de vista de las múltiples interacciones que los caracterizan"*[5] y en la cual muchos profesores desconocen pero se evidencian en su quehacer pedagógico, aunque el modelo pedagógico tiende a confundirse con el modelo curricular, definido por Malagón (2013) como un *"proceso de regulación funcional en la configuración del campo del currículo, que comprende la sistematización cognitiva de un contexto determinado, en el conjugan saberes y conocimientos, así como formas administrativas y de gestión"* que están ligadas al gobierno de turno y que define sus alcances de acuerdo a sus proyecciones; es decir, *"por políticas curriculares, entendemos aquellos aspectos que en el marco de políticas educativas más amplias se ocupan de la reglamentación y de lo que se enseña en las escuelas"*.[6]

Por otra parte, un análisis histórico es de vital importancia para conocer cómo ha ido evolucionando la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad del Tolima, en su construcción curricular a partir de unas entrevistas con los docentes Armando Duque Patiño y Luis Alberto Malagón Plata, sobre la historia de la Universidad.

"*En 1945, siendo diputado a la Asamblea del Departamento del Tolima para el período 1944-1946, don Lucio Huertas Rengifo, presentó un proyecto de ordenanza por el cual se creaba la Universidad del Tolima; este fue aprobado mediante la Ordenanza No. 05 del 21 de mayo de 1945 y pasó a sanción del señor Gobernador. La Universidad del Tolima nació con la firma del Decreto No. 357 del 10 de marzo de 1955, que al amparo de la Ordenanza No. 26 del 16 de diciembre de 1954 le asignaba recursos del presupuesto departamental. Este Decreto creó los cargos de Rector y de Decano de la Facultad de Agronomía". En cuanto a la Facultad de Ciencias de la Educación inició su funcionamiento mediante acuerdo no. 018 del 28 de julio de 1969, el Consejo Directivo de la Universidad del Tolima, el cual fijó los planes de estudio para las licenciaturas en educación con las áreas de matemáticas y física, biología y química, geografía e historia y español e inglés*"[7].

En los años 1970 en la época del gobierno de Carlos Lleras Restrepo, quien era de corte liberal, señalaba en su plan de desarrollo económico que *"las matrículas de la educación superior era del 9,6% y el nivel de deserción era del 55%*"[8], razón por la cual el Tolima representaba un estancamiento educativo; y según el profesor Duque, *"las licenciaturas fueron producto de un sinnúmero de voces que se gestaron en el departamento del Tolima para la capacitación docente y su interés, debido a que solo se contaba con normalistas y bachilleres quienes eran los encargados de dictar las clases en los colegios del departamento*"[9]. Al nacer los programas de licenciatura se crea para ellos una estructura curricular denominada de área menor y área mayor donde las asignaturas eran tomadas con un nivel de importancia como lo muestra la siguiente tabla:

Área Menor	Geografía	Física	Química	Inglés
Área Mayor	Historia	Matemáticas	Biología	Español

Fuente: los autores

4. Zambrano L., A. *Pedagogía, educabilidad y formación de docentes*. Cali: Nueva Biblioteca Pedagógica, 2002.
5. Iafrancesco V., Giovanni M. (2012) "Conferencia Modelos pedagógicos en Colombia" [video], Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=Ec2N-xFrv1A.
6. Malagón, P., L. A. (2007). *Currículo y pertinencia, en la educación superior*. Bogotá. Cooperativa Editorial Magisterio.
7. Universidad del Tolima (2014 – junio 10). http://www.ut.edu.co/administrativos/.
8. Zambrano L., A. (2008). *Planes de gobierno, autonomía y universidad con condición en Colombia*.
9. Duque P., A. Profesor de planta, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima. Comunicación personal, (27 de mayo de 2014).

Las licenciaturas que se ofertaron en los años 70, dentro de la línea pedagógica tenían una visión psicologista de la pedagogía de ciencias de la educación, donde se enfatizaban de manera general, en el niño y en el aprendizaje y se apaleaba a la educación basada en la sociología de la educación, la administración educativa y la didáctica (métodos de enseñanza y prácticas pedagógicas).

Para la época de los años 80, el presidente fue Turbay Ayala, de corte liberal, aunque sus prácticas eran contrarias curiosamente al ideario liberal, diseñó "el plan de integración social en materia de educación superior que buscaba impulsar la investigación, organizar la educación profesional tecnológica, racionalizar la demanda por ingreso a la universidad, lo que implicaba que no todos podían acceder a los estudios universitarios".[10]

Y se creó la "Ley 80 la cual definió los principios y las normas que regulan la educación post-secundaria o superior"[11] y en la que Duque "suprime la estructura de las licenciaturas que estaban creadas por área menor y área mayor, y establece para la facultad una visión de ciencias de la educación y para los programas (licenciaturas) en su estructura curricular las líneas de profesionalización, disciplinar y complementaria; en esta época se impartieron cursos de investigación y ética."[12]

En los años 90 se hace una reforma a la educación con la Ley General 115, expedida por el Congreso de la República de Colombia (1994), donde define el currículo como "Un conjunto de criterios, planes de estudio, programas, metodologías y procesos que contribuyen a la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local…."[13]; esta definición configura un hecho que contiene un conjunto de procesos que manifiestan el interés por llevar la educación a una organización sistemática y constructiva, aportando entonces a la Facultad un grupo de procesos de organización académica para la formación contextualizada de la región.

[10] Zambrano L., A. (2008). *Planes de gobierno, autonomía y universidad con condición en Colombia*.
[11] http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-102556_archivo_pdf.pdf
[12] Duque P., A. Profesor, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima. Comunicación personal, (27 de mayo de 2014).
[13] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1994). *Ley 115 febrero 8 de 1994*.

Para la época aparece el término acreditación en la Resolución 272, de acuerdo con el profesor Duque "en la estructura curricular de los programas se empieza a trabajar por núcleos del saber pedagógico, donde en la asignatura historia de la educación y epistemología, instituciones educativas, didácticas, el saber pedagógico como saber propio, y las prácticas pedagógicas. Como material de apoyo nace la propuesta de trabajar por módulos"[14], lo anterior fueron identificados por el Consejo Nacional de Acreditación (1998), y que están estrechamente relacionados: la *educabilidad*, la *enseñabilidad, las realidades sociales y la estructura histórica-epistemológica de la pedagogía así:*

Educabilidad, es el proceso de humanización que caracteriza el desarrollo individual y social y la disposición de los individuos para la *formación,* frente a las fuerzas educadoras, mediada por la razón.

Enseñabilidad, hace referencia a las características de los saberes que les permiten ser enseñados y a los docentes como portadores de la cualidad de la *enseñanza,* para lo cual deben desarrollar las habilidades comunicativas y hacer uso de diversas técnicas y medios. (Flórez, 1994)[15].

La enseñanza es el principal proceso intencional mediante el cual la sociedad moderna convierte a sus individuos en herederos de su saber de su tradición y de su pasado histórico, de su competencia productiva, de su capacidad de convivencia presente y de sus posibilidades de proyección hacia el futuro. La enseñanza es la experiencia sistemática que la sociedad diseña para que los jóvenes se humanicen y se enriquezcan espiritualmente (Flórez, 1994).

La enseñanza, constituye un campo intelectual de objetos, conceptos y métodos que trascienden la concepción instrumental, para ubicarla no sólo como saber y como práctica, sino como elemento integrador entre el conocimiento, la sociedad y la cultura, y sus relaciones con los otros saberes, con la persona humana y sus formas de conocer. (Zuluaga, 1987).

Realidades sociales, están presentes en la educación y por tanto, la institución educativa y la acción intencional de la enseñanza, están determinadas por la cultura (el conocimiento, las tradiciones, el

[14] Ibíd. Pág 9
[15] Flórez, R. (1994). *Hacia una Pedagogía del Conocimiento*. Bogotá: Mc. Graw Hill

lenguaje, la organización social, la economía, las tendencias educativas y las políticas institucionales, nacionales e internacionales…). La educación es la vía social por la que se ejerce influencia sobre el ser humano para formarlo en un permanente proceso de apropiación de cultura. La cultura expresa la manera de sentir, pensar y hacer, que representa lo que una sociedad ha hecho y que es capaz de hacer en sentido retrospectivo y prospectivo, en una visión valorativa del mundo y de la vida que determinan su destino histórico-social (Ramírez, 2002).[16]

Estructura histórica-epistemológica de la pedagogía, constituye el espacio de saber de la pedagogía. Su objeto es la reflexión sistemática sobre la enseñanza, como proceso conscientemente organizado y dirigido. (Cardozo, Néstor, 2006)

La Pedagogía fundamenta su derecho a la autonomía y a la especificidad en el hecho de que ninguna otra ciencia o disciplina toma la responsabilidad de analizar a instruir. Así pues, la enseñanza como campo de saber se construye en el pasado puesto que recoge la tradición educadora; en el presente porque cubre la cotidianidad del docente y de la institución educativa, explora las relaciones con el entorno socio cultural, la práctica política, las formas de articulación y sus didácticas. Como práctica, constituye un acontecimiento cultural y social y el espacio de saber en el cual unas regiones de conceptos de una disciplina o teoría tienen una forma de existencia en las instituciones.

Actualmente se plantea una nueva cultura pedagógica, que evidencia un contagio de postmodernidad y se asume el reto de pensar en la pedagogía desde la pedagogía (con lineamientos teóricos), aunque las disposiciones resultan descontextualizadas de su original marco de referencia (pedagogía) o reducidas a meros componentes didácticos y diseños instrumentales que a toda costa se pretenden aplicar en los campos de enseñanza, conocidos como salones de clase.

En el año 2003 el Ministerio de Educación Nacional promulga el decreto 2566 "Por el cual se establecen las condiciones mínimas de calidad y demás requisitos para el recimiento y desarrollo de programas académicos de educación superior" donde hace mención a la estructura curricular de los programas, en el cual se debe tener en cuenta la parte profesional, disciplinaria y humanística; además aparece el término crédito académico, el cual se define como el tiempo estimado de actividad académica del estudiante en función de las competencias académicas que se espera el programa desarrolle, el cual se discrimina en número de horas de trabajo individual del estudiante y el número de horas de acompañamiento del docente, siendo este cambio curricular el que llevará a desarrollar el compromiso de la formación del estudiante, el cual más adelante, será docente.

La formación docente tiene que ver con el ser de la persona, formar es dar forma (Cardozo, Néstor, 2006)[17], es decir organizar las estructuras del ser humano de acuerdo con una determinada concepción o ideal. Por consiguiente, la formación tiene que ver con la interioridad de la persona, su estructuración no puede darse sino desde dentro, desde los fundamentos del propio ser. Hoy día la estructura curricular de la Facultad de Ciencias de la Educación se ha motivado a la educación con calidad, pertinencia y compromiso social, proyectando un graduado con reconocimiento en la región por su liderazgo y amor por su profesión docente.

Para concluir

Son múltiples las razones por las cuales es preciso describir los cambios significativos que han tenido las estructuras curriculares de los programas de licenciatura de la Facultad de Ciencias de la Educación. En primer lugar, porque es el enfoque de créditos académicos que está en el centro de la política educativa colombiana en sus diversos niveles de educación superior, y esto hace que sea necesario que todo docente aprenda a desempeñarse con idoneidad en su profesión aprovechando al máximo su tiempo y su nivel de competencia, justificado en el acuerdo 1295 de 2010, donde se establece las políticas para los programas de Educación Superior y donde exige en sus contenidos curriculares los aspectos básicos del programa, con la incorporación de los elementos como, por ejemplo, la fundamentación teórica del programa, los propósitos de formación del programa, las competencias y los perfiles definidos, el plan general de estudios representado en créditos académicos, entre otros.

[16] Ramírez, J. (2002). *Conceptualización general sobre educación y cultura*. Universidad Surcolombiana.

[17] Cardozo E., N. R. (2006), *Aproximación al perfil docente en la universidad del Tolima 1980 – 2003.*

De acuerdo con Sergio Tobón (2006), los docentes en estos programas deben tener competencias, la cuales se podían agrupar en tres, así[18]:

- Competencias humanistas, sensibilidad (empatía, afecto, tacto, tolerancia), ética (vocación, compromiso, honestidad), liderazgo, sentido crítico, de participación y trascendencia.
- Competencias pedagógicas, reconocimiento del estudiante como sujeto del saber, manejo teórico-práctico de las categorías fundamentales de la pedagogía y su relación interdisciplinaria con otras ciencias, manejo de métodos y técnicas de investigación para producir conocimiento pedagógico, dominio de las diversas formas de comunicación y tecnologías de la información.
- Competencias profesionales: conocimiento de la disciplina que enseña, de su historia de su estatuto epistemológico y de sus implicaciones didácticas[19].

En segundo lugar, porque los programas están diseñados para contribuir al desarrollo de la sociedad mediante la formación de excelentes docentes en didáctica de las disciplinas específicas, que propendan por la formación integral de la región e integren los conocimientos pedagógicos y disciplinares en los procesos de docencia, investigación y difusión del conocimiento.

Y tercero, porque dentro de las políticas de educación superior, las competencias constituyen la base fundamental para orientar el currículo, la docencia, el aprendizaje y la evaluación desde un marco de calidad. Ahora bien, en la consolidación de la estructura curricular de la Facultad de Ciencias de la Educación, no sólo han influido estos desarrollos disciplinares, sino también el momento histórico y la economía. Y eso se debe tener en cuenta para la proyección social que esta imagina y en las crecientes presiones políticas, para que la educación forme para la vida y para el trabajo con calidad, y trascienda el énfasis en lo teórico y la mera transmisión de la información, pues con la paulatina emergencia de la sociedad del conocimiento, lo más importante no es tener conocimientos sino saberlos buscar, procesar, analizar y aplicar con idoneidad.

18. Tobón, S.. (2006). *Formación basada en competencias. Pensamiento complejo, diseño curricular y didáctica*. Bogotá, Colombia: Ecoe.
19. Ibíd

Referencias

Cardozo E., N. R. (2006). *Aproximación al perfil docente en la Universidad del Tolima 1980 – 2003.*

Consejo Nacional de Acreditación. (1998). *Núcleos Básicos del saber pedagógico*. Bogotá

Duque P., A. Entrevista personal, 27 de mayo de 2014.

Flórez, R. (1994). *Hacia una Pedagogía del Conocimiento*. Bogotá: Mc Graw Hill

Guzmán O., G. & Quimbayo V., Carlos A. (2013). *Estilos pedagógicos de profesores universitarios, estudio de caso en la Universidad del Tolima.* Ibagué: Universidad del Tolima.

Iafrancesco V, G. M. (2012) "Conferencia Modelos pedagógicos en Colombia" [video], Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=Ec2N-xFrv1A

Jaramillo, J. (1990). *Historia de la pedagogía como historia de la cultura*. Bogotá: Fondo Nacional Universitario.

Malagón P., L. A. (2007). *Currículo y pertinencia, en la educación superior*. Bogotá. Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional, http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-102556_archivo_pdf.pdf

Ramírez, J. (2002). *Conceptualización general sobre educación y cultura.* Neiva: Universidad Surcolombiana.

Tobón, S. (2006). *Formación basada en competencias. Pensamiento complejo, diseño curricular y didáctica.* Bogotá, Colombia: Ecoe.

Zambrano L., A. (2008). "Planes de gobierno, autonomía y universidad con condición en Colombia".

Zuluaga, O. L. (1987). *Pedagogía e Historia.* Bogotá: Ediciones Foro Nacional por Colombia.

Creencia y concepciones sobre la naturaleza del conocimiento matemático en estudiantes de una institución rural

Gerardo Patiño Varón[1]

Resumen. El presente artículo es una muestra sucinta de los resultados parciales obtenidos en un proyecto de investigación que tiene como objetivo principal caracterizar las creencias y las concepciones que tienen algunos estudiantes sobre la naturaleza del conocimiento matemático. En primer lugar, se exponen las razones por las cuales es importante reflexionar sobre las concepciones y las creencias sobre las matemáticas, y luego, se hace una distinción entre algunas concepciones sobre la naturaleza del conocimiento matemático considerando siempre sus implicaciones didácticas, por último, se muestran algunos diagramas que permiten visualizar las posturas de los estudiantes sobre tres cuestiones respecto del conocimiento matemático, así: 1) El papel que juega la memorización y el seguimiento de las reglas cuando se estudia matemáticas, 2) La habilidad en matemáticas y su relación con la capacidad de hacer cálculos rápidamente, y 3) La naturaleza misma del conocimiento matemático, aquí se presenta la opinión de los estudiantes a la cuestión de si el conocimiento es matemático es fijo.

Palabras clave. Concepciones, creencias, naturaleza del conocimiento matemático.

Abstract. The next article is a brief simple of obtained results in an research Project whose main objective is to caracteriza beliefs and conceptions some students have about nature of maths knowlege. First and foremost, they are exposed reasons by which it is important to reflect about conceptions and beliefs on maths, and then, a distinction is made among some conceptions about nature of maths knowledge, always considering it´s didactic impications, in the end, some diagrams are shown which allow to visualize student´s positions on tree matters about maths knowledge: 1) the role memorizing and obeisance of rules plays when maths is studied. 2) The skill in maths and it´s relation with capacity of making calculations quickly, and 3) The nature in self of maths knowledge, here opinion of students is presented to the matter about if maths knowledge is settled.

Key words. Conceptions, beliefs, nature ok maths knowledge.

Creencias y concepciones

El estudio de las creencias y las concepciones de la naturaleza del conocimiento matemático (NCM) es un campo que viene tomando cada vez más importancia. Alfonso Jiménez Espinosa (2009) establece que ante los evidentes fracasos escolares en matemáticas, reflexionar sobre la NCM y sus implicaciones didácticas es una cuestión más actual que nunca. Sin duda alguna, se reconoce la necesidad de investigar las concepciones que se tiene de la NCM puesto que tanto en estudiantes como en docentes, las concepciones y las creencias tienen una serie de implicaciones de carácter epistemológico.

Las reflexiones sobre la epistemología de la matemática cobra mayor interés, dado que las concepciones que se tienen respecto al conocimiento matemático implica unas actitudes que condicionan por un lado a los docentes, quienes dependiendo de sus concepciones sobre la NCM tienen una forma particular de enseñar matemáticas, y por el otro lado influye en los estudiantes, quienes adoptan unas suposiciones culturales que dependen de la forma en que aprenden matemáticas.

Naturaleza del conocimiento matemático (NCM)

Godino, Batanero y Font (2004) identifican dos concepciones sobre la naturaleza del conocimiento matemático considerando sus implicaciones en la didáctica de la matemática.
Por un lado identifican la concepción idealista-platónica y por el otro la concepción constructivista.

Para estos autores según la concepción idealista-platónica los alumnos deben primero adquirir las estructuras de la matemática de forma axiomática,

[1] Licenciado en Matemáticas. Estudiante de Maestría en Educación, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima, Colombia; e-mail: gerardopatinovaron@gmail.com

presentando además definiciones y teoremas que pondría al estudiante en situación de poder resolver los problemas y aplicaciones que luego se les presente. Según esta concepción, la matemática pura y la matemática aplicada son dos disciplinas distintas, y el conjunto de estructuras matemáticas preceden sus aplicaciones, es decir, la naturaleza de la matemática es independiente de la aplicación en las demás disciplinas.

Por otra parte, la concepción constructivista de NCM que proponen estos autores también es descrita según sus implicaciones didácticas, y se fundamenta en la relación entre la matemática y sus aplicaciones en otras áreas.

Según esta concepción, los estudiantes deben ver cómo la matemática satisface una necesidad; el conocimiento matemático surge de manera natural como una respuesta del estudiante a los problemas que se presentan del entorno físico, biológico y social en que el hombre vive (pág. 22). Entonces la relación entre la matemática y las demás áreas precede el mismo saber matemático, siendo necesarios los problemas del entorno para la construcción de las estructuras matemáticas básicas. Por último, según esta concepción son los mismos estudiantes en su necesidad de resolver los problemas que su entorno les ofrece, los que dan la importancia a las estructuras matemáticas.

Esta clasificación atiende a la diferenciación más común cuando se identifican las diferentes concepciones de NCM. En el primer extremo se encuentra la postura platónica, según la cual las matemáticas son un sistema de verdades que ha existido desde siempre independiente del hombre. Los lineamientos curriculares del área de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional sostienen que, según esta concepción, la matemática trasciende la mente humana y existe fuera de ella como una “realidad ideal” independiente de nuestra actividad creadora, y de nuestros conocimientos previos (pág. 10). Esta concepción de NCM se dice platónica dada la noción de Platón sobre el mundo de las ideas. Las ideas según Platón, son objetivas, eternas y universales. Los triángulos “concretos” dice Platón, son imperfectos, y terminan por borrarse; aquí triángulo concreto hace referencia a la representación de un triángulo, en contraposición a la idea de triángulo, la cual es perfecta.

Metodología y objetivos de investigación

La investigación sobre la cual se fundamenta este artículo tiene un enfoque cualitativo. Puesto que no se pretende la generalización, sino que más bien, se tiene el objetivo de analizar ampliamente las concepciones de un grupo de estudiantes; se considera por lo tanto que, el estudio de casos, es el tipo de investigación más apropiado para abordar este estudio.

El objetivo principal de investigación es caracterizar las concepciones de naturaleza de conocimiento matemático que tienen los estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa José Celestino Mutis del municipio de Prado, Tolima.

Identificación de las concepciones de los estudiantes sobre la NCM

La identificación de las concepciones de los estudiantes sobre NCM, se hace mediante la aplicación de algunos cuestionarios utilizados en investigaciones, sin embargo, aquí se presenta únicamente el análisis de los resultados del cuestionario propuesto en *Didáctica de la Matemática para Maestros*, lo cual representa para la investigación un pilotaje que da ideas iniciales generales sobre las concepciones del grupo de sujetos. El cuestionario está compuesto por nueve enunciados que reflejan diferentes modos de pensar sobre las matemáticas, el conocimiento matemático y la forma de hacer matemáticas; sin embargo, solo se muestran las posturas de los estudiantes frente a tres afirmaciones:

Las matemáticas implican principalmente memorización y seguimiento de reglas.

La eficacia o el dominio de la matemática se caracteriza por una habilidad en conocer hechos aritméticos y de hacer cálculos rápidamente.

El conocimiento matemático es fijo e inmutable

A continuación se presenta en tres diagramas de barras, algunos de los resultados obtenidos con los estudiantes que participaron en el proyecto.

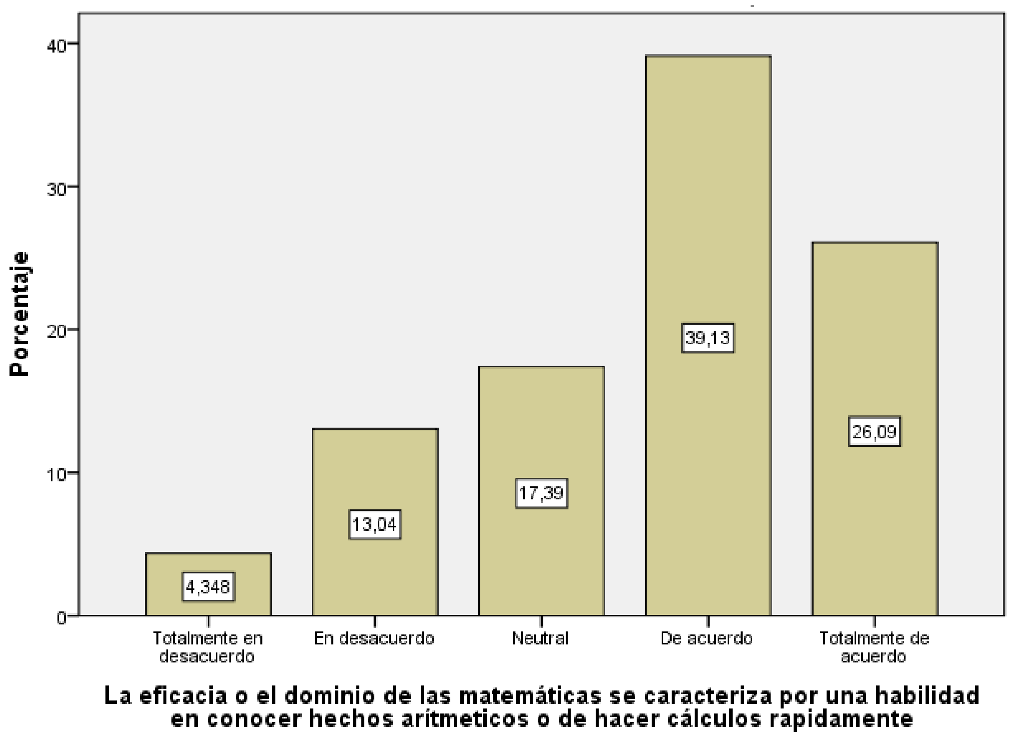


Gráfico 1

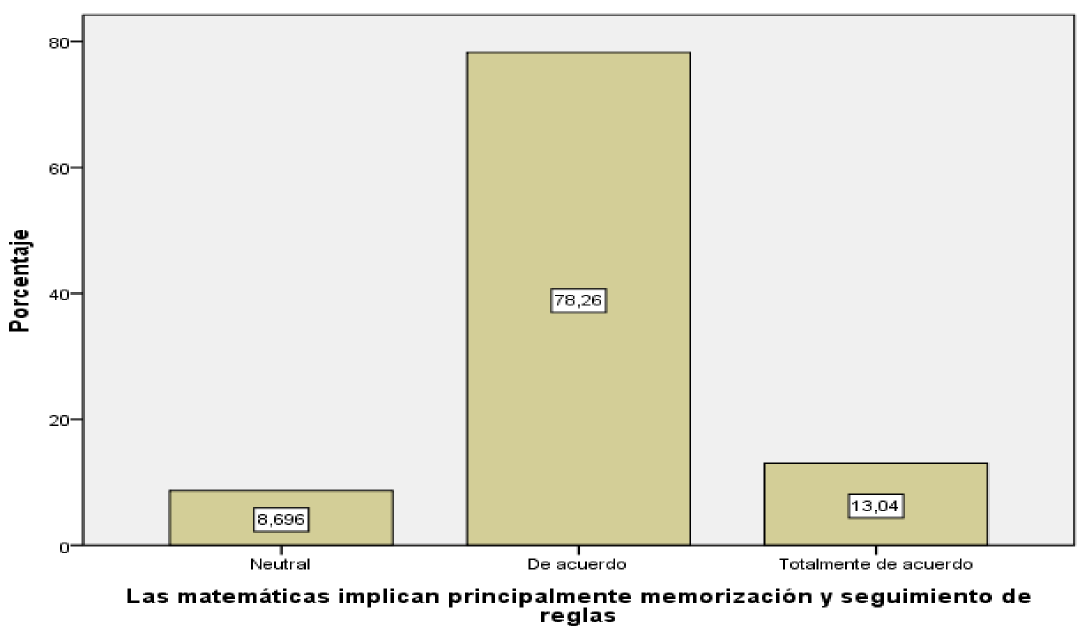


Gráfico 2

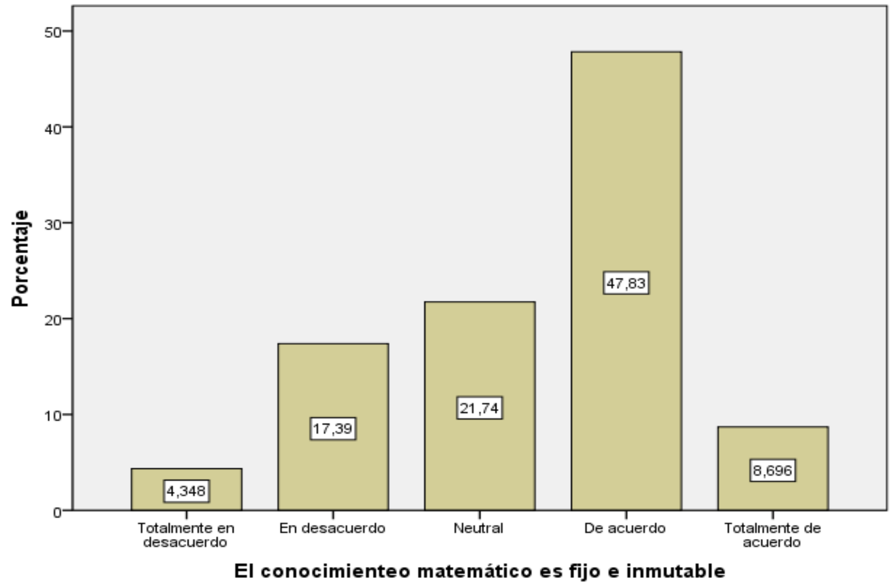


Gráfico 3

Conclusiones

Con el desarrollo de este estudio diagnóstico, se puede concluir inicialmente que, las concepciones que tienen los estudiantes sobre la NCM no son las más adecuadas, pueden enmarcarse en lo que Flores (1998) denomina concepciones subjetivas. Este tipo de concepciones encontradas en los sujetos no se corresponden con las concepciones actuales sobre la matemática, se nota por ejemplo, que un alto porcentaje de estudiantes (78,28) considera que las matemáticas implican principalmente la memorización y el seguimiento de reglas. Así mismo, se encontró que los estudiantes tienen la creencia de que saber matemáticas es hacer cálculos aritméticos rápidamente. Por último, en el *Gráfico 3* se hace evidente otra suposición cultural que considera las matemáticas un cuerpo de conocimiento inacabado, creencia que no se corresponde con las concepciones falibilistas del conocimiento matemático tales como los son la escuela cuasi-empirista y la escuela constructivista que presentan una visión alternativa a las concepciones tradicionales de la NCM, en donde el absolutismo y las pretensiones de verdad sobre el conocimiento matemático son relegados para dar un lugar más importante al sujeto y a la sociedad como productores de conocimiento matemático. Para finalizar, y con el objetivo de crear conciencia respecto a la necesidad de reflexionar sobre las concepciones de NCM es necesario reconocer que estas concepciones y creencias de los estudiantes tienen una serie de implicaciones en el aprendizaje de las matemáticas.

Referencias

Diaz Godino, J. & Batanero, C. F. (2004). *Didáctica de la Matemática para Maestros.* Granada. Recuperado el 8 de enero de 2013 de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Flores, P. (1998). *Concepciones y Creencias de los futuros profesores sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje.* Granada: COMARES.

Jiménez E., A. (2009). *Las concepciones sobre la naturaleza de la matemática y su influencia en el salón de clase.* Duitama. Recuperado el 10 de diciembre de 2014 de http://virtual.uptc.edu.co/procesos/matematicas2009/memorias/Archivos/Conferencias/conferenciaAlfonso%20Jimenez.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá: Serie Lineamientos Curriculares.

El horror al infinito

Yasmín Johanna García Gaviria[1]

Resumen. En este artículo se aborda el problema del "horror al infinito" por parte de los antiguos griegos y la manera como este problema histórico se hereda hasta nuestros días. El resultado principal de este trabajo es la caracterización de algunos obstáculos epistemológicos propios de la noción de límite; tratamos de mostrar que, si bien los obstáculos están presentes en el aula de clase, el conocimiento de ellos nos permitirá crear estrategia para trabajar ese horror al infinito que experimentó Aristóteles, siendo la historia y la epistemología la única ayuda.

Palabras clave: infinito, límite, convergencia, obstáculos epistemológicos.

Introducción

El infinito tiene un papel esencial e incuestionable en las matemáticas modernas; para el matemático y el licenciado en matemática de hoy en día es una "noción matemática" con la cual es necesario trabajar. Por tanto, llevar el infinito a las aulas de clases es el reto hoy de cada educador matemático tanto a los docentes de la básica como de la media; sin embargo se puede documentar que una de las causas del fracaso por parte de los estudiantes que ingresan a la universidad en los primeros cursos de cálculo es el poco dominio de los conceptos fundamentales, porque en sus instituciones educativas no se dedica el tiempo suficiente a los últimos ejes temáticos del grado undécimo como son el límite, la derivada, la integral, entre otros, sino que incluso algunas instituciones pasan por alto el área de cálculo para dedicarse a otros propósitos propios de la institución. Pero hay que llamar la atención en el hecho de que algunos docentes no "dominan" los conceptos fundamentales. Clásicamente se atribuye a la baja formación de los estudiantes y del docente la causa del problema, muy pocas veces se examina las dificultades intrínsecas y propias de los conceptos, pues aquellos conceptos que han tomado siglos su formalización y comprensión, por parte de muchos matemáticos en diferentes contextos, se pretende enseñar en sesiones de uno o dos semestres bajo presiones académicas, créditos que cumplir y tres o más áreas de conocimiento que entender. El estudiante y el docente finalmente no pueden evitar enfrentarse a los llamados obstáculos epistemológicos, aquellos que son heredados del conocimiento como tal y que no importan los esfuerzos de las partes, siempre están ahí presentes, entorpeciendo el proceso de aprendizaje por parte de los estudiantes. Esta situación es vista con preocupación por académicos, catedráticos e investigadores que, buscando la manera de aportar al problema del fracaso, se remiten a los estudios históricos y epistemológicos donde indagan formas de abordar el problema de la mejor manera.

El horror infinito de los griegos

Remitiéndonos a una revisión panorámica del desarrollo histórico del cálculo, hemos encontrado que a través de más de 2.500 años se dio una serie de contextualizaciones y recontextualizaciones teóricas cuya trascendencia generalmente no se ha tenido en cuenta en las aulas de clase. Entre estos aspectos podemos señalar la estrecha relación entre

[1] Licenciada en Matemáticas y Física, Universidad del Valle, Colombia; e-mail: yasmin.garcia@correounivalle.edu.co

el límite y los procesos actual y potencialmente infinitos. En nuestro estudio histórico del infinito vemos que nace la necesidad de diferenciar y entender el infinito potencial. Estos aspectos nos remiten obligatoriamente a los inicios de las matemáticas occidentales en la antigüedad griega. En especial nos conducen directamente al llamado "horror al infinito", que consiste en la no aceptación de los procesos infinitos acabados. Para Aristóteles todo sistema científico debía ser consistente, y la aceptación del infinito actual llevaría a contradicciones; claramente, el ejemplo está en las paradojas de Zenón, si se aceptaba que el continuo estaba compuesto como un agregado actualmente infinito de puntos es en sí mismo contradictorio. Por tanto se acepta solo el infinito potencial, aquel que se da en un proceso sin fin. Es importante llamar la atención en el hecho que Arquímedes, en su método exhaustivo, basado en la proposición X.1 de Euclides, calcula algunos límites; pero, de ninguna manera, podemos decir que Arquímedes defina tal noción. Sin embargo, el método permite calcular con infinitas figuras, inscritas o circunscritas, algunas cuadraturas. Si analizamos la proposición X.1[2,] podemos afirmar que se están dando condiciones, tipo épsilon-delta, para que el límite de una sucesión converja a cero. Los matemáticos griegos concibieron el método exhaustivo para encontrar la cuadratura del círculo. Este método se apoya en la suposición de que la diferencia entre la medida de un círculo y uno de sus polígonos inscritos puede ser tan pequeña como se quiera; todo depende del número de lados que contenga ese polígono. Se trata, justamente, del cálculo de una sucesión que converge a cero. Un hecho poco comentado en los libros típicos de Historia de las matemáticas es que en los *Elementos*, Euclides incorpora en la proposición XVI, el llamado ángulo de contingencia; es un ángulo formado entre una circunferencia y su recta tangente en un punto determinado. Es un ángulo tan pequeño como se desee, pero mayor que cero. Con esta proposición encontramos una magnitud infinitamente pequeña, un ángulo que siendo mayor que cero, es menor que cualquier ángulo dado. Euclides no utiliza este ángulo en ninguna operación geométrica, simplemente lo enuncia como una propiedad de la tangente a una circunferencia.

El horror al infinito en la edad media

En la edad media se dan cambios sustanciales en la forma de hacer ciencia. El orden escolástico impone condiciones y métodos. La discusión sobre el infinito pasa a un nivel teológico. Desde la teología se planteaba que si podía haber "algo" que podía denominarse infinito acabado ese algo debía ser únicamente Dios. Al utilizar palabras como eterno, omnipotente, perdurable, entre otras denominaciones, para el infinito, se designaban propiedades de la divinidad. De esta forma, se podría decir que en la cultura matemática perduraba la idea aristotélica de la no existencia del infinito actual en la Matemática. En el renacimiento resurge la necesidad de indagar sobre el infinito matemático, en especial con el estudio del espacio y el universo infinito. Los artistas de la época utilizaron las matemáticas para hacer florecer y embellecer sus obras de arte; en este sentido uno de grandes aportes fue la noción de punto de fuga, mediante el cual se daba perspectiva a las pinturas. También hay un resurgir de la discusión filosófica respecto al infinito, en particular con Giordano Bruno, el espacio, el lugar y posición que ocupamos en nuestro universo es un importante objeto de estudio, después de las teorías copernicanas las cuales afirmaban la centralización del universo. Bruno afirma que el sol era solamente una estrella que hacía parte de nuestro universo infinito que el sol no era el centro y que el universo no tendría por qué tener un centro, esta afirmación le da otro punto de vista al límite entendido desde las matemáticas, las matemáticas parecen resurgir después de un receso medieval. Matemáticamente, en este periodo, la indagación sobre el infinito resurge en los trabajos de Cavalieri, quien establece un formalismo para tratar el infinito actual en el marco de cuadraturas y curvaturas. A partir del denominado Principio de Cavalieri se hace posible la comparación entre dos figuras utilizando principios atomistas. Cavalieri formaliza esta suma, del latín *Ominus*, fijando unas reglas operativas muy particulares, obtenidas de la generalización de las operaciones finitas. A través del *Ominus x*, que se traduce: súmese continuamente "todos los objetos *x*", Cavalieri esquiva el horror al infinito de los antiguos para incorporar sumas actualmente infinitas camufladas en la teoría de razones y proporciones, pues el proceso se efectúa a partir de comparaciones sucesivas que le permiten obtener resultados en cascada; esto es, de dimensiones inferiores a dimensiones superiores. El

[1] **Proposición X1.** Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que la de su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada. (Euclides, 1991)
[2] **Proposición XVI.** La recta trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos con el mismo caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el restante menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo (Euclides, Elementos, 1991, págs. 311-312).

método de los indivisibles fracasa por dos razones fundamentales: (1) no se puede extender para todos los casos, pues los procesos operativos algebraicos son limitados. (2) La falta de un sustento formal para los indivisibles y el *Ominus*. Con Wallis se da un paso trascendente que lleva de los indivisibles a los infinitesimales; concepto controversial que se convertirá en una herramienta conceptual en los trabajos de Newton y Leibniz. Con el proceso del uso de los infinitesimales estamos muy cerca del concepto de límite. Sin embargo, críticos de la talla de Berkeley, entendieron que la salida a través de los infinitesimales constituía una falsa salida al problema del horror al infinito planteado por los antiguos. Sería Cauchy quien daría ese gran paso de entender el límite no como una herramienta, sino como un concepto a través del cual se formalizaban los procesos potencialmente infinitos, como salida al "horror al infinito" de los antiguos. De esta manera, los infinitesimales, cantidades actualmente infinitas, se definen con base al límite, en un proceso formal que no lleva a las contradicciones planteadas por Aristóteles, pero en su línea de desarrollo filosófico. Tal como lo ha mostrado en (Arbeláez G. I., 2010) si bien el límite constituye una salida conceptual a la implementación del infinito potencial, como telón de fondo aparece el infinito actual. Concretamente la instauración del infinito actual, por parte de Cantor, tuvo como antecedente importante la implementación del concepto de límite. En otras palabras los procesos infinitos, actuales y potenciales, se encuentran dialécticamente relacionados.

El horror al infinito en el siglo XXI

Son muchas las investigaciones en la actualidad que han tomado como punto de referencia el concepto de límite atendiendo a las dificultades de los estudiantes en los primeros cursos de la universidad. Muy pocas de éstas hacen referencia directamente a la tensión entre el infinito actual y el infinito potencial. Sin embargo, hemos documentado algunos trabajos que de alguna manera serán utilizados como punto de referencia en nuestra investigación.

En su tesis doctoral *Estudio micro genético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso*,[3] César Delgado (1998) realiza un estudio de caso con relación a la secuenciación y control de obstáculos y dificultades conceptuales, con el fin de desarrollar los esquemas conceptuales de los alumnos que dan cuenta de las definiciones matemáticas de límite y continuidad. El objetivo de este trabajo es estudiar el problema de la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad, en el caso de un primer curso de cálculo a nivel Universitario, para proponer explicaciones que ayuden a comprender las fuentes de la problemática y así, encontrar soluciones a las dificultades que se presentan en la enseñanza de estos conceptos fundamentales del cálculo. La conclusión principal es la posibilidad de establecer situaciones didácticas que permitan controlar la evolución conceptual y establecer una relación eficaz entre aprendizaje y desarrollo cognitivo. En la tesis doctoral *Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión* de Rosa Elvira Páez Murillo (2004)[4] se pretende evidenciar que las nociones fundamentales del cálculo (derivada e integral) están definidas en términos de la noción de límite. Por lo tanto, es primordial entender este último para la comprensión de los conceptos en cálculo. Un problema significativo, en el quehacer académico de profesores y para la propia investigación en educación matemática, es el afrontar que un considerable número de alumnos no alcanza los rendimientos esperados en este tipo de asignaturas. El problema de su bajo rendimiento académico se refleja en los resultados obtenidos en pruebas internacionales como el TIMSS (1997), o en los resultados que ofrece la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2000). Lo anterior es un simple indicador para procesos que busquen mejorar la educación.

Conclusiones

Algunos obstáculos epistemológicos propios del concepto de límite.

En este proceso histórico y epistemológico, hemos identificado algunos obstáculos epistemológicos propios del concepto de límite, los cuales, ahora y en la antigüedad, han causado dificultad para la comprensión de los conceptos fundamentales y no han permitido que se formalice el infinito. Esto hace que la enseñanza del cálculo sea uno de los desafíos de la actualidad y la preocupación de docentes e investigadores, no solo de las carreras en matemáticas y licenciaturas, sino de las afines, como ingeniería, entre otras. En este sentido, enunciaremos cada uno de ellos y analizaremos algunas de sus consecuencias en la enseñanza y el aprendizaje del límite.

3. (Delgado, 1998). Tesis doctoral

4. (Páez, 2004)

Tal vez uno de los más importantes sea la definición que se tiene de límite en la cotidianidad, por el inconveniente justamente de utilizar el término “límite”, el cual es entendido como una barrera, muro, pared, o un respaldo final de algo, una línea real o imaginaria de un lugar o espacio. Este obstáculo lleva a que se experimenten contradicciones como las que se dan con las paradojas de Zenón. Esta definición intuitiva que tienen los estudiantes del bachillerato y primeros semestres de universidad, no le permiten comprender el infinito acabado, es herencia propia del horror al infinito de la antigüedad.

Otro de los obstáculos es el de generalización, consistente en llevar las propiedades de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos; pensar, por ejemplo, que las operaciones que se cumplen en lo finito se cumple en lo infinito sin comprender que lo que se está llevando a cabo es justamente el límite como formalización del proceso infinito. Un ejemplo en esta dirección se da cuando en la clase de cálculo se presenta la operación $\infty+\infty=\infty$; aquí los estudiantes creen que están aplicando procesos de sumar infinitos o tratar a ∞ como una cantidad numérica, cuando lo que se está aplicando es el límite de una función, por ejemplo, dada así:

$$\lim_{x\to\infty} x + x^2 = \lim_{x\to\infty} x + \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty + \infty = \infty$$

El procedimiento son aplicaciones de las propiedades de los límites y lo se debe comprender es ¿qué sucede en el infinito?, potencialmente hablando. La salida es comprender que el límite formaliza la potencialidad de los procesos infinitos, el resultado no es una magnitud sino un proceso acabado.

Finalmente, uno de los obstáculos más reiterativos es el uso de las expresiones “infinitamente grande” e “infinitamente pequeño”. Debido a que intenta ligarse con cuestiones cotidianas, ya que concebir algo que sea infinitamente pequeño tiene otras connotaciones, como por ejemplo el átomo, el cual es considerado como algo “infinitamente pequeño”, como ya se había mencionado en Demócrito y el universo es considerado como algo “infinitamente grande”; en este sentido sugiere que sigue siendo lo infinitamente grande considerado como un infinito potencial. En resumen, las nociones de infinitamente grande e infinitamente pequeño siguen siendo muy empíricas; los jóvenes parecen no estar preparados para enfrentar los trabajos de los transfinitos de George Cantor, los cuales se pueden considerar como la formalización del infinito actual, pues ni siquiera lo potencial del infinito ha sido superado.

El horror al infinito: un obstáculo en sí mismo

El temor a aceptar procesos acabados es una experiencia que sienten estudiantes, docentes e investigadores en los estudios del cálculo; es una herencia griega y moderna, porque la experiencia empírica parece decirnos lo contrario, la no aceptación de los procesos infinitos acabados van en contra de nuestros sentidos y se puede considerar en sí mismo un obstáculo propio de la noción, porque en todo los cursos de cálculo en los primeros semestres hay una negación por dejar atrás los procesos potencialmente infinitos y aceptar los actualmente infinitos. Desde los primeros grados de escolaridad vemos como, a veces de manera inconsciente, estamos negándoles la posibilidad a los estudiantes de aceptar el infinito utilizando expresiones que cohíben el uso del límite matemático. Pero, si los obstáculos siempre van a estar presentes ¿cómo lograremos el éxito de una clase de cálculo? Es claro que el infinito no es fácil de estudiar, la historia nos confirma que no será factible la introducción en un par de clases de colegio y universidad; los obstáculos epistemológicos propios del concepto no se pueden evitar, están intrínsecos en el concepto y por tanto en las clases. Es un proceso que se debe hacer despacio y no forzar ni condicionar su uso, así se lograrán resultados distintos a los que se han obtenido hasta ahora. El esfuerzo debe ser de investigadores y didactas juntos, quienes deben buscar estrategias de acercamiento al campo de las ciencias, en este caso las matemáticas. El colegio y la universidad deberían tener puntos de contacto, tanto metodológica como conceptualmente; de esta forma se suavizaría en algo la distancia conceptual del estudiante que se gradúa y logra entrar a la universidad. El límite es un concepto difícil, pasó por muchos procesos para lograr la formalización, su enseñanza es difícil y su estudio también pero, docentes y estudiantes, debemos tomar conciencia de que el infinito hace parte de nuestra cultura y el límite no es ajeno a los procesos matemáticos actuales, si bien los obstáculos no se pueden evitar, con ayuda de la historia y epistemología, tendremos herramientas para trabajar con ellos en el aula de clase.

Referencias

Arbeláez, G. &. (s.f.). *Aspectos culturales estéticos y epistemológicos del infinito matemático.* Documento de trabajo. Cali: Universidad del Valle .

Arbeláez, G. I. (2010). *La Evolución del análisis matemático en Colombia: 1850-1950.* Cali: Tesis doctoral, Universidad del Valle.

Arbeláez, G., & Recalde, L. (s.f.). *Aspectos históricos y culturales, estéticos y epistemológicos del infinito matemático*. Cali: Universidad del Valle.

Bolzano, B. (1851). *Las paradojas del infinito.* (L. S. 1991, Trad.) México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias: UNAM.

Borges, J. L. (1975). Avatares de la tortuga. En J. Borges, *Obras completas* (págs. 254-259). Buenos Aires: Emecé.

Cauchy, l. (1821). *Curso de Análisis.* México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias: UNAM.

Delgado, C. (1998). *Estudio microgénetico de esquemas conceptuales asociados a definición de límite y continuidad en universitarios de primer curso.* Universidad Autónoma de Barcelona: Departamento de didáctica de las matemáticas y de las ciencias experimentales.

Páez, R. (2004). Procesos de construcción del proceso de límite en un ambiente de aprendizaje corporativo, debate científico y autorreflexión. *Tesis doctoral*. México: Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN.

Recalde, L. (2012). *De los fundamentos de las matemáticas.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Recalde, L. C. (10 de Diciembre de 2010). Los filósofos presocráticos: la naturaleza como fuente de experiencia abstracta. *Revista de Ciencias, 14*, 87-99.

Recalde, l. C. (2012). El cálculo y la solución al problema de las cuadraturas. *Lectura 7,* 19-20.Cali: Universidad del Valle.

Recalde, L. C. (2012). La instauración del álgebra y del análisis como rama de las matemáticas. *Lectura 8*, 5-16.Cali: Universidad del Valle.

¿Podemos admitir inconsistencias?

***Diana Isabel Quintero Suica*[1]**

Resumen. En este artículo, se aborda las dos posiciones que surgen en las matemáticas y la lógica, a partir de las contradicciones que se evidencian en algunos sistemas teóricos, la formulación de un cálculo proposicional a partir de la lógica paraconsistente, junto con la demostración de algunos teoremas en dicho cálculo; y la jerarquización de una infinitud de cálculos proposicionales con características particulares.

Palabras clave: Inconsistencia, Principios Aristotélicos, Contradicción, Quasi-Matrices.

De acuerdo a los hechos históricos ocurridos durante el desarrollo de la humidad, fue Aristóteles quien dio las primeras bases sobre las leyes que debían gobernar la lógica. Dichos principios reciben el nombre de: Principio de Identidad (*si hay proposiciones verdaderas, hay una realidad a las cuales estas proposiciones se refieren* $[A \leftrightarrow A])$, no contradicción (*es imposible que algo sea y no sea al mismo tiempo y en el mismo sentido o en la misma dirección, y que la realidad es una y no dos, es decir, que si A es B y A no es B, son afirmaciones, solo una de las dos puede ser verdadera, y no las dos* $[\sim (A \wedge \sim A)])$ y tercero excluido (*la realidad es un sistema de partes determinadas recíprocamente, es decir, que todo tiene que ser o no ser. Si A es B o A no es B son proposiciones, no pueden ser falsas las dos. Si se niega una, no queda más alternativa que afirmar la otra*. $[A \vee \sim A])$, (Gamarra, 2004)

Algunos matemáticos de finales de siglo XIX como Frege, Pierce y Peano, fundamentaron sus trabajos en Matemáticas a partir de los principios establecidos por Aristóteles. Otro Matemático que trabajó con base en este esquema de razonamiento, fue George Cantor, y a partir de allí creó su teoría de los números transfinitos, en la cual se diferenciaba la clase de los números reales, naturales y racionales. Sin embargo, Bertrand Russell, logicista de la época, interesado en el estudio de los trabajos elaborados por Cantor en Teoría de Conjuntos, encontró en dicha teoría algunas falacias o errores de las cuales nace la paradoja de Russell que ilustra que es posible un resultado como *la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas*.

Él hizo un primer intento para remediar la contradicción que se presentaba en compañía de su profesor Whitehead, y en 1910 publicaron *Principia Mathematica,* libro donde se exponía la forma de resolver las diversas paradojas que surgían a partir de las contradicciones de los sistemas teóricos.

Paralelo a los esfuerzos por tratar de eliminar las paradojas que se encontraban en las teorías, en el mismo año nace una postura que, centrada en el estudio minucioso del principio de no contradicción de la lógica clásica, da origen a la concepción de lógicas basadas en los principios de identidad y tercero excluido, conocidas estas como lógicas no aristotélicas (paraconsistentes) - de manera semejante a como nacieron las Geometrías no euclidianas, al no aceptar como cierto el quinto postulado de Euclides.

La postura anteriormente expuesta, fue engendrada, de manera independiente, por los matemáticos Jan Lukasiewicz y Nikolaj Alexándrovic Vasiliev, y formalizada posteriormente con los trabajos de Newton Carneiro Affonso Da Costa, nacido en la ciudad de Curibita, al sur de Brasil. Con este último, se logra dar la presentación que hoy conocemos de las lógicas paraconsistentes.

Definición de las lógicas paraconsistentes

Un argumento conocido en lógica para evitar las inconsistencias es el argumento de la trivialización, donde se propone que, a partir de dos enunciados, de tal forma que uno sea la negación del otro, se puede deducir cualquier otra afirmación de acuerdo a Bomberieth (1995).

Una teoría que se caracteriza por lo dicho anteriormente, en donde todos sus enunciados son teoremas, se llama *trivial.* Estos sistemas pierden su utilidad debido a que puede deducirse cualquier fórmula bien formada. Sin embargo, desde el punto de vista sintáctico-semántico las teorías son aceptadas siempre y cuando no sean triviales.

1. Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; e-mail: dma_dquintero472@pedagogica.edu.co

Todo lo anterior tiene como fin establecer la definición de lógica paraconsistente, si esta es una teoría inconsistente pero no trivial, entendiendo teoría inconsistente como aquella que contiene al menos dos teoremas de la forma p y $\sim p$, uno de los cuales es la negación del otro. Montes y Restrepo (2000).

El cálculo proposicional C_1

Lo primero que propone Da Costa es un sistema de cálculo proposicional, que denomina C_1, el cual tiene los conectivos de la lógica clásica de negación (~), conjunción (&), disyunción (V), implicación (⊃) y equivalencia (=), además de dos reglas de deducción básicas, que son:

> ***Regla 1.*** En C_1 no debe ser válido, en general, el principio de la no contradicción.
> ***Regla 2.*** De dos proposiciones contradictorias no debe ser generalmente posible deducir cualquier proposición.

Los nueve axiomas iniciales que propone Da Costa para este sistema de cálculo proposicional son:

1. $A \supset (B \supset A)$
2. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)$
3. $A \supset (B \supset A \& B)$
4. $A \& B \supset A$
5. $A \& B \supset B$
6. $A \supset A \vee B$
7. $B \supset A \vee B$
8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$
9. $A, A \supset B / B$

Además se añaden nuevos elementos antes de mostrar algunos teoremas que se deducen en este. Uno de ellos, indica que por ejemplo, si un enunciado A es derivable en el sistema C_1, y además no se tiene simultáneamente su negación en este mismo sistema, entonces este enunciado se comportará igual que las fórmulas del cálculo proposicional clásico, es decir, que para estos enunciados sí vale el principio de no contradicción, entendiendo este desde la formulación en donde $\backsim(A \wedge \backsim A)$ es verdadera, siendo A una proposición cualquiera, $\backsim$ es el símbolo de negación y $\wedge$ representando el conectivo de la conjunción.[2]. A este tipo de enunciados se les llamará proposiciones que se "comportan bien"[3], y los notaremos como $A°$.

También se hace necesario introducir algunas definiciones dentro del sistema

Definición 1. $A°$ será definida como $\backsim(A \wedge \backsim A)$
Definición 2. $\neg A$[4] será definida como $\backsim A \wedge A°$

Con base en lo anterior, se agregan los siguientes cuatro axiomas a nuestro sistema.

10. $A° \supset ((B \supset A) \supset ((B \supset \backsim A) \supset \backsim B)))$
11. $(A° \wedge B°) \supset ((A \wedge B)° \wedge (A \vee B)° \wedge (A \supset B)°)$
12. $A \wedge \sim A$
13. $\sim\sim A \supset A$

Ya con nuestros axiomas, definiciones y reglas de inferencia, demostremos algunos teoremas en este sistema

Teorema 1: Ley de Pierce $((A \supset B) \supset A) \supset A$

Además debemos tener tres esquemas para obtener la demostración. La verificación de que estos esquemas son tautologías se podrá hacer en el Anexo por medio de las *quasi-matrices*[5].

Esquema 1: $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$
Esquema 2: $\neg(A \supset B) \supset A$
Esquema 3: $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

Demostración. Para iniciar la demostración debemos tener en cuenta que $(A \supset B) \supset A \vdash A$ por el recíproco de la regla de introducción del implicador (T.D.).

1.	$(A \supset B) \supset A$	Hipótesis
2.	$\big((A \supset B) \supset A\big) \supset (\neg A \supset \neg(A \supset B))$	Esquema 1
3.	$\neg A \supset \neg(A \supset B)$	Modus Ponen (1,2)
4.	$\neg(A \supset B) \supset A$	Esquema 2
5.	$(\neg(A \supset B) \supset A) \supset (\neg A \supset (A \supset B))$	Esquema 1
6.	$\neg A \supset (A \supset B)$	Modus Ponen (4,5)
7.	$\big(\neg A \supset (A \supset B)\big) \supset ((\neg A \supset \neg(A \supset B)) \supset A)$	Esquema 3
8.	$(\neg A \supset \neg(A \supset B)) \supset A$	Modus Ponen (6,7)
9.	A	Modus Ponen (3,8)
10.	$((A \supset B) \supset A) \supset A$	T.D. (7)

[2] Otra formulación del principio de no contradicción y que no es equivalente a la mencionada en el artículo es que, dadas dos proposiciones A y $\backsim A$, una de las cuales es la negación de la otra, entonces una de ellas es falsa. Esta formulación no se aceptará ya que no es coherente con la definición de lógica paraconsistente dada en el artículo anterior, donde esta era inconsistente (es decir A y $\backsim$A y eran aceptados), pero no trivial.

[3] Da costa propone usar en portugués la expresión "bem comportada", o lo que en inglés es equivalente a "well-behaved"

[4] El símbolo (¬), denominado negación débil, difiere del símbolo (~) (denominado en este sistema negación fuerte), y es el conector lógico de la negación clásica.

[5] El papel de las quasi-matrices en la lógica paraconsistente es el mismo de las tablas de verdad en la lógica proposicional clásica. Se nombra así porque en ella se debe tener en cuenta que dada una determinada proposición que se supone verdadera, su negación tendrá dos valores de verdad. Para consultar mayor información acerca de la construcción de las quasi-matrices, el lector interesado lo puede hacer en Montes y Restrepo (2000).

Por ejemplo, para comprobar si las leyes de Morgan son esquemas válidos en este sistema, se tienen dos opciones: la primera verificar que la tabla de verdad o quasi-matriz de este esquema indica que es una tautología, es decir, que el valor de verdad al final de la tabla sea siempre 1. La segunda demostrar que se cumple por medio de una presentación como la realizada anteriormente para la ley de Pierce. En este documento abordaremos la primera opción dejando al lector interesado abordar la segunda.

Ley de Morgan: $(\sim A \vee \sim B) \supset \sim(A \wedge B)$

La cuasi matriz asociada será la siguiente

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$\sim A \vee \sim B$	$(A \wedge B)$	$\sim(A \wedge B)$	$(\sim A \vee \sim B) \supset \sim(A \wedge B)$
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
			1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
		1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
			1	1	1	0	0
						1	1
		1	0	1	1	0	0
						1	1
			1	1	1	0	0
						1	1

Con la información anterior se puede ver que algunas leyes de Morgan como esta no son válidas. Con la misma estrategia es posible demostrar que por ejemplo $\sim(A \wedge B) \supset (\sim A \vee \sim B)$ sí es tautología.

Jerarquía de Cálculos proposicionales C_n

Da Costa, al hacer público el trabajo sobre el tipo particular de cálculo proposicional C_1, establece algunas características de él, como por ejemplo que en este se mantienen válidos el *modus ponen,* la introducción y eliminación de la conjunción, la disyunción y eliminación de la doble negación. Además, si a los axiomas de este sistema se les agrega el principio de no contradicción, obtendremos el cálculo proposicional clásico.

Lo interesante de este asunto es que no solo existe un tipo particular de cálculo proposicional, en este caso C_1, que cumple con los aspectos antes mencionados, sino que existe un infinito número de cálculos que lo cumplen. Da Costa los presenta de una manera formal jerarquizándolos de acuerdo al grado de buen comportamiento de las proposiciones en cada uno de ellos. De acuerdo a esto último tenemos que hay un primer nivel de comportamiento, llamado A° o $A°=A^1$, luego un segundo nivel $(A°)°$, o sea A^2, etc.

Se halla una relación entre el cálculo proposicional C_n, en la medida en que las fórmulas "clásicas" se representan como A^n, es decir, que indica el nivel de contradicción que soporta dicho cálculo. Por esta razón el cálculo proposicional C_0, que para nuestro caso será el cálculo proposicional clásico, tiene un nivel cero de contradicción, es decir, no acepta contradicción alguna en su sistema.

Finalizando, Da Costa menciona que con esta presentación de un nuevo tipo de lógica, es posible abrir una vía diferente a la eliminación de las paradojas comentadas en la primera edición, que conmocionaron a los matemáticos de la época, obviando la necesidad de crear restricciones para lograr esta eliminación.

Referencias

Bobenrieth, A. (1995). *Inconsistencias ¿Por qué no?* Bogotá: Tercer mundo editores.

Gamrra, S. (2004). *Lógica Jurídica, Principio de razón suficiente*. Lima: Fondo Editorial de la UNMSM.

Montes, J., & Restrepo, C. (2000). *Lógicas Paraconsistentes: una introducción.* (Tesis de pregrado). Escuela de Ingenierías Universidad EAFIT, Medellín, Colombia.

Anexo

Quasi-matriz Esquema 1

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$A \supset B$	$B \wedge \sim B$	$A \wedge \sim A$	$\sim (B \wedge \sim B)$	$\sim (A \wedge \sim A)$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \supset \neg A$	$(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1
			1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
		1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
			1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
		1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
			1	1	1	1	0	0	0	0	1	1

Quasi-matriz Esquema 2

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$A \supset B$	$\sim (A \supset B)$	$(A \supset B) \wedge \sim (A \supset B)$	$\sim ((A \supset B) \wedge \sim (A \supset B))$	$\neg(A \supset B)$	$\neg(A \supset B) \supset A$
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
			1	1	0	0	1	0	1
					1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
		1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
			1	1	0	0	1	0	1
					1	1	0	0	1
		1	0	1	0	0	1	0	1
					1	1	0	0	1
			1	1	0	0	1	0	1
					1	1	0	0	1

Quasi-matriz Esquema 3

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$A \supset B$	$B \wedge \sim B$	$A \wedge \sim A$	B°	A°	$\neg B$	$\neg A$	$A \supset \neg B$	$(A \supset \neg B) \supset \neg A$	$(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
			1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
		1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
			1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
		1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
			1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1

El docente matemático como un formador permanente frente a la realidad democrática de un país

Rafael Antonio Reina Ortiz[6]

"No hay educación si no hay verdad que transmitir, si todo es más o menos verdad, si cada cual tiene su verdad igualmente respetable y no se puede decidir racionalmente entre tanta diversidad".
Fernando Savater

La educación se ha implementado a lo largo de la historia como algo fundamental para el "Ser humano", entendiendo que la educación no es solo la que se conoce desde la escuela, sino que también va inclinada en la educación que se da desde casa y se adquiere en el contexto, al que pertenece el sujeto.

Cuando se menciona estos aspectos, se habla entonces de una educación continua que desarrolla y potencia la formación del niño para estimular su progreso tanto social como individual, teniendo en cuenta que este proceso se da en la medida en que se abra campo a la relación entre Maestro-Estudiante, para equilibrar la enseñanza desde la posibilidad de constructo que se dé y fortalezca a la educación actual.

Pero no se puede negar, que en cuanto al sistema educativo que se maneja específicamente en Colombia se hace un rechazo por parte de los ciudadanos, puesto que es evidente las falencias que afectan de una u otra manera el proceso educativo.

Estos son aspectos que infieren al compromiso del gobierno con las escuelas en el país; pero también es una responsabilidad del pueblo luchar por la educación, para dar mejoras en un futuro a la sociedad o comunidad a la que se ha sujetado a través del tiempo.

Entonces se puede decir que es aquí donde entra a jugar el papel que cumplen las escuelas y el docente matemático, para formar personas autónomas, críticas y ejemplos de una sociedad, pues el educar no es solo nutrir al estudiante de conocimientos, sino también es guiar al otro por el camino de la responsabilidad, donde se le debe enseñar que pertenece a una comunidad que siempre tendrá derechos, los cuales están en la posibilidad y escogencia de decidir, protestar o defender con ellos, si se está de acuerdo o no con esos derechos, normas y leyes que se presentan para dicho contexto.

Los derechos y deberes de un ciudadano, son el constructo de decisiones y aportes que se hacen a través del tiempo buscando mejoras en las problemáticas internas del país. Es entonces allí, donde se debe emplear la democracia como ejercicio único para replantear esas problemáticas y llevarlas a un plano de discusión, donde se halle una solución que no sea solo tomada por los altos mandos (Jerarquías), sino también por un pueblo que tiene a la par voz y voto respecto a lo que sucede.

Por tanto, no se puede descartar la educación de este tipo de situaciones que aún se sufren en la actualidad. La educación es pieza fundamental para encaminar a las personas por la solución abierta, en palabras de Savater:

> "la mayoría de nuestros problemas podrían empezar a solucionarse en ese campo. Desgraciadamente hay poco espacio real para el optimismo ya que, como todos sabemos, la educación es un servicio caro, complejo y que genera todo tipo de dificultades en muchos países. Y en América latina, para no hablar de las naciones africanas, esas dificultades son graves. Para concluir en este punto: no es que

[6] Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima, Colombia; e-mail: rafa01kun@gmail.com

> yo piense que la educación nos llevará al reino celestial, sino que sinceramente no sé cómo podrían mejorarse realmente las condiciones del mundo sin pasar primero por mejorar la educación". (Savater, 1997)

A partir de esta reflexión que hace Savater, es claro que la educación no es la única salida a los problemas que se dan en un país, pero sí es la forma de crear otras expectativas frente a lo que la realidad presenta; por eso es de gran importancia entender que la educación es un proceso largo que contribuye al desarrollo de un pueblo en general, para lograr un adecuado engranaje, es decir, la educación y otras alternativas pueden ser la unión y la solución a tantos problemas.

De esta manera, siendo explicado el aporte que hace la educación al sistema social, entonces se dará inicio a revisar ¿Qué rol cumple el docente matemático en la formación de seres humanos en la escuela?

Se sabe que no es tarea fácil, hacernos esta pregunta y menos cuando en las escuelas continuamente se hace un rechazo permanente frente a las matemáticas; a lo largo del tiempo se han nombrado las matemáticas como una materia problema, donde pocos aprenden y muchos en su mayoría lo hacen como una obligación. Entonces, esto nos hace pensar en ¿qué sucede al interior de las escuelas?, para que se den estas consecuencias.

Mayoría de veces, la escuela impone modelos educativos que no están acordes a las necesidades de los niños de determinado contexto, por lo cual agrede o atente contra la formación de estos, comprendiendo que cada niño es único y diferente y que por el mismo motivo no todos aprenden y entienden en el mismo nivel y al mismo tiempo. Y es ahí donde se debe determinar, cómo reevaluar estos problemas para mejorar la educación.

Al hacer énfasis en reevaluarse, hace referencia a estar revisando qué problemáticas y qué necesidades se dan para así mismo plantear metodologías educativas que no sean arbitrarias a las realidades que se dan en contexto. El maestro debe tener en cuenta su compromiso, y por ello, como parte fundamental de su proceso y profesión docente, es que debe actuar ante lo que sucede, pero además, es preciso que el docente renueve su forma de enseñar, para no hacer monótona y rígida su clase. En este caso, sería el maestro de matemáticas que se tiene como una persona bastante estructural, que se encierra en su metodología repetitiva y poco deja al estudiante.

Pero adentrando en el tema que se hace hincapié a lo largo del texto, primero se debe dejar en claro que es necesario generar cambios. Pero por otro lado, no se puede descartar que esta ayuda a la educación no sería significativa sin quienes dan sentido a labor del maestro, que son los mismos estudiantes, y por esto es tan importante que las escuelas se interesen en formar personas críticas y autónomas, y no personas dependientes o esclavas de un sistema político. Así estas personas aportarán de una manera adecuada y continua a la comunidad sin atentar contra el bienestar del otro.

Al tener las matemáticas desde el punto de vista rígido y repetitivo, los estudiantes o la sociedad no ven todo lo que esta puede aportar para el desarrollo de toda una sociedad, esto tomado o guiado desde lo tecnológico y científico

> La enseñanza [de las matemáticas] debería ayudar a que los estudiantes experimenten y reconozcan el papel de las matemáticas en la sociedad y en la cultura. Para que sean capaces de tomar responsabilidades y de participar en una comunidad democrática, los estudiantes deberían poder comprender las maneras en que las matemáticas se usan. (Valero, 2012)

Por eso es tan útil apropiar las metodologías que se van a emplear para producir un agrado o motivación en los estudiantes al momento de aprender y conocer de las matemáticas.

Las matemáticas, son un medio o entrada al mundo real, pues en ellas no solo se reconoce fórmulas y una cantidad de números y cifras para obtener un resultado, sino que eso le da al ser humano la posibilidad de pensar y de generar interrogantes frente a esas fórmulas, las cuales el maestro debe atribuir o plantear desde una realidad concreta que le facilite al niño entender lo que allí se da, para que cuando se enfrente a la realidad sea responsable de sus actos, responda por sus consecuencias y le dé solución a las diferentes problemáticas que se le van a presentar en su ámbito y en su vida.

Así, que la función del maestro por estos tiempos no está nada fácil de proponer, comenzando porque el docente debe estar actualizado en cuanto a lo científico y tecnológico, para implementar nuevas características en su manera de enseñar, con miras a la ayuda que puede dar estos avances en la educación y formación del niño; se mira como una dificultad, pero es algo que no será imposible de lograr. En la educación es bueno justificar esto con argumentos valederos, que le den una reconstrucción a las matemáticas desde otros ámbitos para crear seres libres que elijan cómo aprender y no que estén permeados por una alienación, que les impida tomar la educación con amor y responsabilidad.

En conclusión, entonces queda claro lo que la educación acarrea tanto bueno como malo, así que el docente tiene el gran compromiso de revisar y valorar todo lo que refiere a su asignatura, para llevar a cabo de una manera constructiva la enseñanza-aprendizaje en el “Ser humano”; este es un reto que aún se sigue estudiando para fortalecer la formación, pero además de ello, para argumentar que las matemáticas sí son fundamentales para reconocernos como seres democráticos que están en toda la capacidad de elegir y reconocer la labor que se debe cumplir como ciudadano integrante de un contexto, rodeado por las funciones de un sistema político, económico y educativo que allí se dan, sujetado a las prioridades que tiene el maestro y más concretamente el profesional matemático.

Referencias

Savater, F. (1997). *El Valor de Educar*. Barcelona: Ariel.

Valero, O. S. (2012). *Rompimiento de la Neutralidad Política: el compromiso crítico de la educación matemática con la democracia*. Bogotá: Universidad de los Andes

Hacia la construcción de una actitud científica educativa, desde la pedagogía y la didáctica

***David Antonio Gonzales Guzmán*[1]**
***Jefferson Durán Triana*[2]**

"El que tiene imaginación sin instrucción tiene alas sin pies."
Jacobus Jouber

"Cuando la teoría sirve poco para la práctica, no es por culpa de la teoría, sino precisamente porque no hay suficiente teoría"
I. Kant

Resumen. El presente texto tiene como finalidad la revisión documental de los conceptos relevantes que tienen que ver con la ciencia educativa, para darle un enfoque estructural y metodológico hacia lo que sería la construcción de una actitud científica educativa, donde los estudiantes tengan mayor entendimiento de aquello que se les brinda en su proceso de educación, que cimenta las bases sólidas que permite la comprensión del mundo material y simbólico, y tener las herramientas de tipo críticas, reflexivas y participativas para desarrollarse con el mundo.

Es por ello necesario develar los verdaderos propósitos de la pedagogía y la didáctica, para llevar a cabo procesos efectivos en la adquisición de un marco científico que conduzca al desarrollo cabal de los estudiantes, donde el escepticismo sea motor principal del aprendizaje, ya que la pseudociencia día a día transciende los campos de la vida humana. Envueltas en mantas impregnadas de verdades improvisadas y acomodadas.

Palabras clave: actitud, ciencia, Pedagogía, Didáctica.

Abstract. The present text has as purpose, the documentary review of the relevant concepts that they have to see with the educational science, to give him a structural and methodological approach towards what it would be the construction of a scientific educational attitude, where the students have major understanding of that one that they offers in his process of education, which establishes the solid bases that there allows the comprehension of the material and symbolic world, and have the critical, reflexive and participative tools of type to develop with the world.

It is for it, which is a necessary develar the real intentions of the pedagogy and the didactics, to carry out effective processes in the acquisition of a scientific frame that he leads to the complete development of the students, where the skepticism It is a principal engine of the learning, since the pseudoscience day after day transciende the fields of the human life. Wrapped in blankets impregnated with unexpected and well-off truths

Key words: attitude, science, Pedagogy, Didactics

Introducción

En un mundo cada vez más cambiante y lleno de lenguajes vulgares lamidos con lenguas de verdades acomodadas y crédulas, donde los medios de comunicación salpican con su maravilloso mundo de las cosas, las mentes humanas carentes de todo sentido para contrarrestar e impedir la alienación social, a este respecto Carl Sagan (s.f.) nos dice que: *"…Una sociedad cada vez más crédula, cuyos miembros aceptan igualmente lo que les ofrece la medicina, las filosofías de la Nueva Era, la tecnología, la pseudociencia, los políticos y las sectas, es una sociedad carente del menor sentido del escepticismo…*" (Sagan. (s.f., p.1)

Un escepticismo fundamentado en la reflexión crítica y propositiva de lo que es y puede ser el conocimiento del mundo y las ciencias. Kurts. P. (2002), afirma que "*la mejor terapia para la credulidad y la imaginación desenfrenada es el desarrollo de una actitud científica…"* (p.6). Para tal empresa es necesario definir el verdadero papel

[1] Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima, Colombia; e-mail: alucard632@hotmail.com
[2] Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima, Colombia; e-mail: jefryduranrock@hotmail.com

de la epistemología de las ciencias, y así, aplicar métodos de enseñanza aprendizaje en la escuela donde se desarrolle dicha actitud científica, como también los verdaderos roles de la ciencia pedagógica y didáctica.

Ahora bien, está claro que la educación debe partir de reflexiones pedagógicas para sacar a sus estudiantes de tal credulidad del mundo actual lleno de falsedades, obscuro y sin retorno, como lo es el mundo de la ignorancia. Recordando las palabras de Rousseau (s.f.) en su discurso sobre las ciencias y las artes dice que: "*Nuestras almas se han corrompido, a medida que nuestras ciencias y nuestras artes han avanzado hacia la perfección.*"(p.33)

A este respecto, conviene decir que las palabras de Rousseau convienen vigentes y proféticas para el deterioro del mundo de las ciencias y la academia del presente siglo. Por otro lado, es de gran importancia definir por ahora qué es ciencia para seguir con nuestra reflexión, a lugar citando a Barnes y Edge, (1982), Echeverría afirma:

> *"La ciencia es una actividad social que está determinada por sus orígenes, y los valores, creencias y normas que le dan sentido a sus praxis, su actividad y producciones, los cuales están dados por el contexto social en el cual se desarrolla y que son cambiantes dependiendo de la vigencia que le da la sociedad en sus diferentes instituciones. Entre otras palabras, la ciencia incluye una serie de prácticas sociales que deben estar regidas por una axiología de la ciencia" (p.262).*

En suma, la ciencia es recurrente y mantiene cierta fidelidad con el momento histórico en donde esta es germinada, que le da sentido a su praxis social, y que es caduca en el sentido que puede cambiar y quedar obsoleta con el pasar de los días, como bien lo expresa el autor, la ciencia es una serie de prácticas sociales, las cuales conservan una íntima relación con la cultura, dado que esta, de un modo u otro la determina, los avances y los estancamientos están enmarcados en la ciencia.

A este sentido, es necesario establecer qué es pedagogía y didáctica, y cómo desde su praxis potencializa una actitud científica, crítica y propositiva para romper con los esquemas de la credulidad, establecidas por la pseudociencia, que reviste las representaciones mentales de las sociedades actuales. Es por eso que se retoma el concepto que tiene Durkheim en Arango (s.f.), a reivindicar la ciencia pedagógica:

> *"…La pedagogía consiste en teorías sobre la forma de concebir la educación… la pedagogía no es la educación, su papel no consiste en sustituir a la práctica, sino en guiarla, en ilustrarla, en ayudarla, en caso necesario, a colmar las lagunas que pueden producirse en ella, y en paliar las deficiencias que en ella se puedan detectar. Por consiguiente, la misión del pedagogo no es la de construir partiendo de la nada un sistema de enseñanza, como si no existiere ninguno antes de su aparición, muy al contrario debe empeñarse ante todo a entender y comprender, el sistema de su tiempo, únicamente con esta condición le será posible hacer uso de él con descernimiento y calibrar lo que en él pueda existir de deficiente." (Durkheim, 1996, p.73)*

Al afirmar que la pedagogía se refiere al estudio de las teorías que enmarcan el quehacer educativo, refiere a uno de los postulados principales donde se llega a caer en las definiciones facilistas sobre pedagogía y el concebir que la pedagogía es la educación, pero el teórico nos enmarca en sus palabras "la pedagogía no es la educación". Y ella tiene como propósito fundamental la de alimentar el acto mismo de la enseñanza- aprendizaje, que es opacado por roles que no le son propios y que generan más daños de los que remedia.

Este es el caso de pensar que la pedagogía es la que enseña y la que resuelve los problemas que sí enmarcan problemas educativos, pero que no tiene nada que ver con ella; problemas como los problemas conductuales de los estudiantes, la falta de asistencia, la inclusión descarada de artículos tecnológicos en el aula, entre otros, es a esto, a lo que los docentes quieren encontrar la fórmula mágica pedagógica, pero no, la pedagogía va más allá del mero hecho de estar en interacción en un plano educativo.

La pedagogía es reflexión constante en contexto, crítica y propositiva de los procesos educativos, en donde intervienen saberes de las diferentes disciplinas y ciencias, y así proponer métodos y técnicas que vayan en pro de desarrollar un pensamiento educativo efectivo. Manfred Max Neff nos dice que: "*vivimos en un mundo en el cual sabemos muchísimo, pero del cual no comprendemos nada".* Es allí donde la educación juega un papel determinante para aplicar verdaderos procesos pedagógicos que, como ya se ha planteado, el desarrollo de una *"actitud científica*", una teoría pedagógica que contribuya a la mayor comprensión de las teorías y los saberes que se imparten en el campo educativo.

Un sistema educativo, que no es ajeno a las transformaciones del mundo actual, donde reina la ignorancia y cada vez más las mentes son seducidas por los cultos, la pseudociencia, el drama, y otros fenómenos que se extienden reiteradamente, en el marco de la aldea global. Es por ello que la educación debe tomar una posición definitiva para erradicar tales fenómenos sociales, y para esto es necesario construir procesos pedagógicos que medien entre la escuela y la sociedad actual, en pro de desarrollar en la población educativa una actitud científica de la mano de la investigación incesante que promueva los problemas que aquejan al nicho inmediato donde se desenvuelve el educando.

> *"Si vamos a responder el crecimiento de la irracionalidad, necesitamos desarrollar un aprecio por la actitud científica como parte de la cultura. Debemos aclarar que el principio metodológico de la ciencia es el que no se justifica al sostener una afirmación verdadera a menos que uno pueda apoyarla por medio de la evidencia o la razón…"* (Kurts. P. 2002 .p.349)

A hora bien, para continuar la reflexión es necesario conceptualizar qué es la didáctica y cuál es su papel dentro de los procesos pedagógicos, y cómo se puede direccionar esta para la construcción de una "*actitud científica".* La didáctica es vista como *"un campo de acción de la pedagogía*", Mallart. M (s.f.) y devela una subordinación hacia la pedagogía, la cual enmarca los procesos de enseñanza - aprendizaje en las aulas de clase: *"Didáctica es la ciencia de la educación que estudia e interviene en el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de conseguir la formación intelectual del educando."*(p.5). Formación intelectual que va desde la trasformación de las estructuras mentales y la conducta de los educandos, reflexionando a partir de las interacciones en el aula, para desarrollar prácticas que conlleven al fortalecimiento de una actitud científica. Esta que se convierta en una forma de vida que empieza desde la educación para que ocupe y transgreda otro tipo de esferas sociales. Pero algo que tiene que quedar claro es que hay que poner al servicio la pedagogía y la didáctica, para generar procesos significativos en el aula.

Conclusiones

Formación intelectual que debe de estar encaminada hacia el desarrollo de una actitud científica de la mano de procesos de investigación académica-escolar, que contribuya a proponer de la mano de la ciencia los problemas de los contextos inmediatos, puesto que es necesaria una formación integral de los estudiantes comprometidos con su rol como ciudadanos y sus roles como constructores de un mundo que se desmorona en los avatares de un tiempo ligero y sin amor por el conocimiento.

Referencias

Arango. G. (s.f.). *Saber pedagógico: implicaciones para la docencia y la pedagogía.* Recuperado el 17 de febrero del 2010 de; www. Javeriana. Edu .co/facultades/ .../Articulo %20saber %20pedagogico.doc.

Echeverría. J. (1995). *Filosofía de la ciencia.* Madrid: akal.Sagan. C. (1987). *La carga del escepticismo.* Recuperado el 23 de febrero del 2014 de: http://biblioweb.sindominio.net/escepticos/sagan.pdf

Kurtz. P. (s.f.). *La actitud científica contra la anticiencia y la pseudociencia*. (s.l.): (s.e.)

Mallart, J. (2000): "*Didáctica: del currículum a las estrategias de aprendizaje".* Revista Española de Pedagogía.

Rousseau. J. J. (s.f.). Discurso sobre las ciencias y las artes. Recuperado el 13 de abril del 2014 de; elaleph.com

La Representación de Zeckendorf para los números enteros positivos

Britany Johana Salazar Salazar[1]
Diana Isabel Quintero Suica[2]

Resumen. En el presente artículo, ilustraremos a los lectores sobre un particular teorema de la teoría aditiva de números, donde se aborda una especial representación de los números enteros positivos, involucrando a los ya conocidos y famosos números de la sucesión de Fibonacci.

Palabras clave: Números de Fibonacci, Sucesión, Inducción.

Llamada por Karl Friedrich Gauss (1777-1855) como *la reina de las matemáticas,* la teoría de números es una de las ramas más fascinantes de las matemáticas debido a su elegancia, sus métodos y a su cantidad de problemas no resueltos, que suelen retar a cada nueva generación que ha tratado con ellos. El interés general de esta materia es el estudio de determinados aspectos del conjunto de los números enteros como: la regularidad de los números primos, la divisibilidad, la resolución de ecuaciones Diofánticas, las representaciones de un número entero positivo como resultado de la adición o multiplicación de enteros de una clase concreta, entre otros.

En el presente artículo ilustraremos un teorema muy particular que hace alusión a la representación de un entero positivo a partir de los números de Fibonacci, llamado *teorema de Zeckendorf*. El nombre de este teorema se debe a su creador Edouard Zeckendorf quien fue hijo del dentista holandés Abraham Zeckendorf y de Henriette van Gelder. Nació el 2 de mayo de 1901 en Liege, Bélgica. Fue reconocido como un estudiante sobresaliente ya que desde pequeño dominaba el holandés, por ser la lengua natal de su padre, y el francés que era el idioma oficial de Liege. Entre 1912 y 1919 asistió a la escuela *Royal Athenaeum* donde estudió griego, latín, inglés, alemán, matemáticas y dibujo. Tan pronto acabó la primera guerra mundial, se presentó en la universidad de Liége, donde obtuvo el título de médico especializado en cirugía y maternidad en 1925. Durante este mismo año fue oficial de la armada de Bélgica. El 1929 contrajo matrimonio con la enfermera y miembro de la reforma cristiana Elsa Schwers.

Zeckendorf publicó cerca de treinta artículos en francés para la sociedad real de ciencias de Matésis y Bulletin en Lieja. El único artículo escrito por él en un idioma diferente al francés, es el que se titula *Una generalización de la numeración de fibonacci.* Todos estos artículos fueron escritos sobre los números de Lucas y Fibonacci, números primos, ecuaciones cuadráticas y arreglos combinatorios con letras. En uno de esto artículos describió la forma de representación de los números enteros positivos a partir de los números que pertenecen a la sucesión de Fibonacci, que es el tema que nos atañe en este trabajo.

Teorema de Zeckendorf

Entrando en materia, este teorema de la teoría aditiva de números afirma que:

> *Todo número entero positivo que no pertenezca al conjunto de la sucesión de Fibonacci, se puede representar como suma de dos o más números de Fibonacci, tal que todos ellos son distintos y y no contiene dos números de Fibonacci consecutivos.*

Además, esta representación es única y es llamada la representación de Zeckendorf.

Recordemos un poco la construcción del conjunto de números de la sucesión de Fibonacci, a partir de la definición de dicha sucesión como:

$$F_{n+1} = \begin{cases} 1 & Si\ n = 0\ y\ n = 1 \\ F_{n-1} + F_n & Si\ n \geq 2 \end{cases}$$

[1] Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; e-mail: dma_bsalazar058@pedagogica.edu.co
[2] Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; e-mail: dma_dquintero472@pedagogica.edu.co

Lo que genera el conjunto de números 1,1,2,3,5,8,13,… donde a partir de la posición 2, los elementos del conjunto se generan sumando los dos números anteriores.

Para probar que el teorema es válido se debe demostrar en primer lugar que la representación existe, lo cual se hace por inducción, y luego de ello la unicidad de la representación.

La primera parte la podemos probar fácilmente, ya que para $n=4$ tenemos que su representación es $4=3+1$ (no se prueba para $n=1,2,3$, ya que estos son números de la sucesión de Fibonacci). Si suponemos (hipótesis de inducción) que para $n<k$ hay una representación de este tipo entonces debe haberla también para $n<k+1$. Sabemos que existe un j, tal que $F_j<k+1<F_{j+1}$, donde F_j es un número de Fibonacci y F_{j+1} su sucesor. Consideremos que $a=k+1-F_j$, de lo que podemos afirmar que $a<k$, con lo cual tiene una representación de Zeckendorf por hipótesis. De la misma forma, $Fj+a<F_{j+1}$, y como $F_{j+1}=Fj+F_{j-1}$ por la definición de la sucesión, entonces $a<F_{j-1}$, con lo que concluimos que la representación de no contiene a F_{j-1}. De acuerdo con lo anterior, podemos confirmar que k+1 puede ser representado como la suma de F_j y de , ya sea esta última como un número de la sucesión de Fibonacci o como una de las representaciones de Zeckendorf.

La segunda parte, relacionada con la unicidad, se apoya en el siguiente lema:

> *La suma de cualesquiera dos conjuntos no vacíos de números de Fibonacci no consecutivos, cuyo mayor elemento sea F_j; es estrictamente menor que el siguiente término F_{j+1}.*

La demostración de este lema, igualmente, se obtiene por inducción y se deja al lector interesado.

Para terminar, surge la pregunta ¿Cómo obtener la representación de *Zeckendorf de un entero positivo n?*

Inicialmente verificamos que el número n no pertenezca a la sucesión de Fibonacci [3]. Consideremos ahora un número x_1 como el mayor de los números de Fibonacci que son menores que n y le restamos x1 a n, es decir, $a=n-x_1$. Si a es un número de Fibonacci la representación de Zeckendorf estará compuesta por a y x_1. Si no, elegimos ahora un número x_2, de forma que sea el mayor número de Fibonacci menor que la diferencia a, a la cual le restamos dicho número x_2. Si la resta es cero, ya tenemos la representación de Zeckendorf de ese número n. Si no, repetimos el proceso las veces que sea necesario hasta que una de las restas sea igual a cero.

Vamos a mirar un ejemplo con $n = 86$ entonces

- Como 86 no es un número de Fibonacci, tomamos el número de Fibonacci más grande, que sea menor que 86 que es el 55, que por tanto estará en la representación.
- Restamos 86-55=31. Ahora, como 31 no es un número de Fibonacci, buscamos el número mayor de la sucesión de Fibonacci que sea menor que 31, que es el 21, el cual estará en la representación.
- Efectuamos la resta 31-21=10. Como 10 no está en la sucesión de Fibonacci, entonces buscamos el más grande de los números de la sucesión que sea menor que 10, que es el 8. Este último hará parte de la representación.
- Restamos 10-8=2. Como 2 si es un número de Fibonacci entonces también estará en la representación.

Por lo que la representación de n=86 es:

$$86=55+21+8+2$$

Algunas otras propiedades y aplicaciones de esta representación, se asocian a la multiplicación de Fibonacci y a la conversión de kilómetros a millas las cuales pueden ser consultadas en diversos sitios web.

[3] Para hacer esto, se acude a la propiedad que afirma que un número entero positivo N es un número de Fibonacci si y sólo si $5N^2+4$ o $5N^2-4$, es un número cuadrado perfecto.

Referencias

Jiménez, R., Gordillo, E., Rubiano, G. (2012). *Teoría de números [para principiantes].* (2ª. Ed.)Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Kimberling, C. (1998). Edouard Zeckendorf. Universidad de Evansville. Departamento de Matemáticas. pp. 416 – 418. Recuperado de http://www.fq.math.ca/Scanned/36-5/kimberling.pdf.

LeVeque, W. (1968). *Teoría elemental de los números.* México: Herrero Hermanos Sucesores.

El contexto sociocultural como parte de la enseñanza de las matemáticas

José Jonathan Torres Arias[1]
José Israel Cárdenas Jiménez[2]

Introducción

Habitualmente, la enseñanza de las matemáticas era dominada por el modelo transmisivo– receptivo, donde el profesor elabora contenidos que el alumno recibe pasivamente. Al suceder esto el estudiante no estaba en la capacidad de contextualizar su aprendizaje, produciendo una apatía de los jóvenes frente al tema tratado en el curso regular de sus matemáticas.

De igual forma la enseñanza de las matemáticas debe generar en los estudiantes la capacidad de intuición, razonamiento, de comunicación y de resolución de problemas, encontrando en esta última una dificultad, ya que en las clases se hace hincapié en la resolución de problemas rutinarios y fuera de contexto, que impiden vivenciar en el estudiante las aplicaciones de esta área de conocimiento en la vida real. Generalmente esto se debe a que los estudiantes consideran las matemáticas como un conjunto de temas fragmentados debido a que en las clases no se les presentan situaciones donde tengan la necesidad de relacionar diferentes contenidos.

En el presente documento se pretende compartir una reflexión pedagógica y didáctica evidenciada en el aula de clase frente a las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión del concepto de función lineal, a través del "*Uso del contexto sociocultural como estrategia didáctica en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la función lineal"*. De esta manera el estudiante relaciona los contenidos matemáticos con la realidad de forma significativa. Por esta razón se estableció como propósito principal analizar el impacto del contexto sociocultural del estudiante como elemento facilitador del aprendizaje de la función lineal especialmente las matemáticas.

Para esto se tienen en cuenta los aportes de aprendizaje significativo planteado por Ausubel (2002), donde concibe al aprendizaje como: "Un proceso constructivo y dinámico, donde el nuevo conocimiento se relaciona con las ideas previas propias de la estructura cognitiva del sujeto, por medio de procesos de asimilación y acomodación que modifican los nuevos conocimientos y las ideas previas del estudiante, reorganizan y amplían la estructura cognitiva del sujeto que aprende", y Vigotsky (2001) refiriéndose al papel de la socio-cultura, a la conducta y por ende al aprendizaje, aduce: "el factor decisivo de la conducta humana no solo es el factor biológico sino también el social, que aporta a la conducta del hombre componentes completamente nuevos. La experiencia del hombre no es simplemente la conducta de un animal que ha adoptado la posición vertical, sino que es función compleja de toda la experiencia social de la humanidad y de sus distintos grupos (p. 94)".

Metodología

La intención es buscar estrategias pedagógicas capaces de responder a las necesidades educativas actuales, por esta razón el objetivo principal busca diseñar una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la función lineal a través del uso del contexto sociocultural de estudiantes de grado 10 de la ENSI[3].

El tipo de estudio es experimental y cualitativo. Se trabajó con dos grupos de décimo grado, teniendo en cuenta que a uno de los grupos, el docente que plantea la propuesta le había orientado en al año anterior; el otro grupo se escoge de los otros décimos a los cuales el año anterior no se le había orientado clase. La medición se efectuará a través de una prueba diagnóstica, visitas a diferentes fábricas de la ciudad durante el proceso, y el desarrollo de diferentes tareas desarrolladas por los estudiantes de acuerdo a la información adquirida en cada visita.

[1] Licenciado en Matemáticas, Universidad del Tolima. Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia. Docente de Educación Básica y Media en la Escuela Normal Superior de Ibagué, Colombia; e-mail: torresarias.83@gmail.com
[2] Profesor Tiempo Completo, Departamento de Física y Química, Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia; e-mail: jicardenasj@unal.edu.co

[3] Escuela Normal Superior de Ibagué.

El análisis identifica las producciones realizadas por los estudiantes con el objetivo de detectar dificultades que tienen en el proceso de aprendizaje de la función lineal, luego verificar si el cambio de estrategia didáctica planteada en esta propuesta genera aprendizajes significativos en ellos.

1. La propuesta se realiza con medición previa de un pre-test y con medición posterior de una serie de actividades aplicadas a los grupos.
2. La elección de la muestra es intencional no probabilística ya que se tiene en cuenta a un grupo de estudiantes que recibieron clase en el grado noveno, con el docente que plantea la propuesta y a un grupo que haya sido orientado por otro docente. Cada grupo consta de 29 estudiantes para un total de 58 estudiantes.
3. Se orienta la estrategia didáctica planteada, en la cual se emplean las visitas a diferentes fábricas de la ciudad, con el propósito de emplear el contexto sociocultural del estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esta actividad tiene como fin resolver algunos problemas de la cotidianidad relacionados con la función lineal, ya que a partir del análisis de determinadas situaciones análogas de la vida cotidiana, se puede construir un modelo matemático que describa estas situaciones en términos de relaciones matemáticas y que permita hacer predicciones.
4. Se realizó un pos-test que consta de 10 preguntas y fue aplicado a estudiantes que estaban cursando el grado décimo de la educación media. Se dieron las indicaciones necesarias, se aclararon dudas para que procedieran a contestar las actividades, y se pidió que dieran explicación de sus respectivas respuestas.
5. Finalmente se realiza la comparación del análisis de los resultados de la experimentación con las producciones de los estudiantes con el propósito de conocer con mayor precisión las dificultades que poseen al abordar el tema, cuando realizan pre-test y luego revisar si la implementación de la estrategia didáctica optimiza el proceso de enseñanza aprendizaje.

En el Pre-test se revisó los conocimientos previos que poseían los estudiantes con respecto al tema abordado y qué tan significativos fueron los aprendizajes debido a que la temática había sido orientada en el año anterior. En este proceso se pudo evidenciar que los estudiantes poseen dificultades al realizar una gráfica de la función lineal y más aún cuando se plantea una situación en la cual tienen que exponer una expresión algebraica que represente la situación.

En una de las preguntas propuestas en el pre-test se solicitó a los estudiantes que graficaran y hallaran una expresión algebraica de una tabla de valores y en particular uno de los resultados fueron los siguientes.

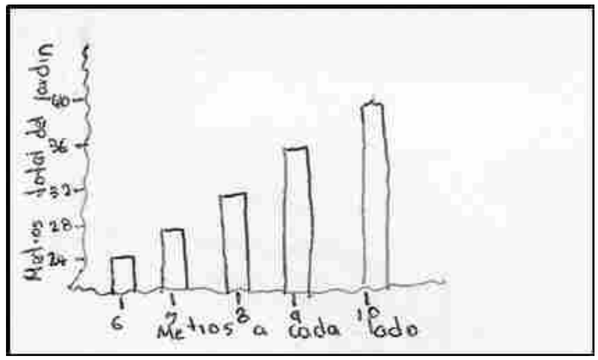


Figura 1. Uno de los resultados del pre-test

De acuerdo a Carmen Azcárate, existen distintos tipos de diagramas, pero en todos ellos se pone de manifiesto más la idea de correspondencia punto a punto que la idea de variación o de continuidad.

En este tipo de respuestas se pudo evidenciar las dificultades que tienen los estudiantes para representar valores establecidos en una tabla, además de invertir ejes de coordenadas y la graduación de la unidad en el plano cartesiano y más aún cuando se les solicitaba que hallaran expresión algebraica que representara la situación.

Propuesta didáctica

Para el desarrollo de la propuesta se propuso realizar algunas visitas a diferentes fábricas de la ciudad entre las cuales podemos destacar la fábrica PRAXADIS ARTUNDUAGA cuyo nombre comercial es Confecciones Carolina, donde recibieron breve orientación por el Director Textil Jorge Luis Oviedo Guzmán, sobre cuál es el proceso de fabricación de la tela, tinturación y confección de camisetas.

Figura 2. Visita y orientación del director textil

Durante este proceso se pudo evidenciar mucha receptiva e interés por parte de los estudiantes los cuales realizaban preguntas las que fueron utilizadas posteriormente para actividades complementarias en clase relacionadas con la importancia de la función lineal en el contexto. Estas actividades fueron desarrolladas en el aula de clase por los estudiantes con el apoyo y algunas orientaciones impartidas por el docente, donde se pudo evidenciar que a los estudiantes se les facilitaba más el desarrollo de ciertas problemáticas cuando habían recibido información previa o conocían con anticipación de qué se trataba la actividad; además se observó que los estudiantes no se sentían obligados a terminar la actividad por desconocimiento o apatía, por el contrario, gracias a la salida pedagógica a la fábrica no encontraron mayor dificultad en realizarla. Se evidenció la capacidad de tabular datos, graficarlos correctamente, interpretar y analizar las gráficas y expresar mediante una expresión matemática dichos datos.

Luego del desarrollo de cada actividad se realizó una socialización con todo el grupo sobre el trabajo realizado dirigida por el profesor para afianzar conocimientos y realizar una retroalimentación del trabajo. A continuación se les dejó una actividad extraclase en la que se solicitó que diseñaran una problemática con la cual se sintieran identificados diariamente y la pudieran relacionar con la función lineal. Algunas de ellas son: el dinero del descanso gastado mensualmente, los metros recorridos diariamente para ir al colegio, el consumo de la gasolina en un mes, etc. Seguidamente los estudiantes expusieron sus actividades en el cual se evidenció manejo de tablas de valores, gráficas, ecuación de la recta, coeficiente de correlación, la pendiente y demás características de la función, en nuestro caso, la función lineal.

Es importante mencionar que dichas situaciones ofrecieron espacios para la construcción de conocimiento y posteriormente se profundizaron en conceptos. En consecuencia, se permitió que los estudiantes relacionaran el tema de función lineal con el contexto.

Finalmente, se realiza un pos - test que consta de 10 preguntas teniendo en cuenta la situación del contexto que vivieron los estudiantes con la visita a la fábrica; en este pos - test se pudo evidenciar mayor seguridad en cada una de las respuestas dadas por los mismos. A raíz de esto se realiza una comparación entre el pre-test y el pos- test donde se puede visualizar que cuando se actúa en el contexto o en situaciones familiarizadas con el estudiante es más enriquecedor y significativo.

Conclusiones

• Nuestro estudio reveló las dificultades que tienen los estudiantes de grado décimo de la Escuela Normal Superior en la interpretación y falta de coordinación entre los diferentes registros tabular, gráfico y algebraico, poseen ciertas dificultades al plantear un modelo matemático que describa la situación problémica que se esté trabajando, además errores en la graduación de los ejes. Las dificultades registradas no solo revelan un descuido notorio de las actividades de conversión por parte de la enseñanza, sino además una confianza excesiva de los estudiantes en los procedimientos que han logrado mecanizar y de los que no manifiestan tener una significación clara.

• La salida pedagógica a la Fábrica Confecciones Carolina fue de gran apoyo para el desarrollo de la estrategia didáctica; los estudiantes estaban motivados por el solo hecho de evidenciar la forma de cómo se fabrica la tela, se tintura la tela y se confeccionan camisetas. Se evidenció gran interés y participación en cada una de las preguntas que realizaban al director textil, las cuales sirvieron de apoyo para la construcción de una de las actividades que se desarrollaron durante el proceso.

• La implementación de la estrategia permitió que los estudiantes estructuraran las características en torno a la función lineal y desarrollaron estrategias que permitieran la aprehensión de la función lineal en diferentes contextos.

• El contexto sociocultural es una herramienta de fácil acceso para el docente, ya que genera motivación inicial en el estudiante para el abordaje de diferentes situaciones problémicas en este caso referidas a la función lineal.

• Presentar a los estudiantes su contexto sociocultural en situaciones de aprendizaje matemático despierta, sin duda, su atención e interés para abordar las actividades y fomenta a su vez, diversos procesos que mejoran progresivamente su motivación, activando las necesidades de logro y mejorando su auto concepto.

Referencias

Ausubel. D (2002c) *Adquisición y retención del conocimiento: una perspectiva cognitiva*. España: Paidós

Duval, R. (1993a). Semiosis y noesis. En Sánchez y Zubieta (Eds.), *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas: Escuela Francesa*. México: Departamento de Didáctica Educativa del CINVESTAV-IPN. (pp. 118-144.)

López, J. A. J. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria. *Números*, (76), 83-103.

Martínez, V. (2004). *Los modelos de enseñanza y la práctica de aula*. España: Universidad de Murcia.

Pérez, c. V., & Deulofeou, J. (2000). *Las ideas de los alumnos respecto a la dependencia funcional entre variables. SUMA, 9*

Santos L., R. (s.f.). *Problemas rutinarios y no rutinarios en educación.* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., 375-382.

Zambrano, R. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. (m. D. Nacional, ed.). Santa fe de Bogotá: Creamos Alternativas Soc. Ltda. (P.131)

Educación matemática, desde el lenguaje y los procesos de conceptualización

***Carlos Alberto Reyes Peña*[1]**
***Jefferson Duran Triana*[2]**

Resumen. Dentro de la educación matemática y lingüística, es necesario contribuir de manera precisa y conceptual en los procesos educativos, teniendo en cuenta los vacíos de la educación respecto a la enseñanza-aprendizaje del ***lenguaje matemático en el aula***. Por tal razón es trascendental reconocer la importancia de los usos lingüísticos, para profundizar y transformar en nuestro caso las formas en que se desarrollan los ***conceptos*** de: cálculo diferencial. Función, límite, derivada, entre otros…

En este sentido, partimos de la base conceptual que se da mediante el lenguaje hablado y escrito, dentro de las aulas y fuera de las cuatro paredes que delimitan los saberes en la edad contemporánea, en donde la matemática siempre está a la disposición humana para develar aspectos de la existencia misma de los hombres dentro de los roles sociales, de tipo material y simbólica.

Palabras clave: educación, lenguaje matemático, usos lingüísticos, conceptos.

Introducción

¿QUÉ ES LENGUAJE? Esta es Una de las preguntas más frecuentes dentro del ámbito académico y escolar, y a la cual no se le puede conceptualizar tan fácilmente por todo y lo que esta significa dentro de la existencia misma del ser humano, Bernardo. P (2008) dice que:

> *"El ser humano necesitó de una serie de herramientas de tipo simbólico, los distintos lenguajes y formas de representación, los mitos, los relatos, las metáforas, los sistemas de notación, las distintas, las disciplinas de conocimiento, los modelos científicos y los modos discursivos que utilizamos para interpretar y negociar significados, todos estos sistemas de símbolos hacen parte de la "caja de herramientas" culturales que los seres humanos necesitamos para alcanzar un pleno desarrollo. Todos nuestros actos intelectuales, nuestras formas de pensar, de aprender y de construir sentido están mediados por estos artefactos simbólicos. (Vygotsky, 1986\1995; Bruner, 1990)*

Es por ello, que dentro del acervo coloquial, solo se tiende a pensar que el lenguaje solo es el código lingüístico (lengua), y se desconoce el saber que esta es solo una forma del mismo, donde existen otros sistemas o códigos de sentido como lo es el lenguaje ***matemático*** y que merece ser tratado así dentro de las aulas de clase. Sin desconocer la relación que este tiene con los sistemas de significación lingüística, es decir, cuando se estructuran sistemas **conceptuales** es necesaria la mediación del lenguaje y es mediante el intercambio escrito y verbal entre los actores educativos quienes establecen relaciones de significado de los conceptos a la hora de aprender ciencias.

Por otro lado, se podría afirmar que:

> *"Aprender ciencias pasa por apropiarse del lenguaje de la ciencia, aprendizaje que está asociado a nuevas formas de ver, pensar y hablar sobre los hechos, distintas de las formas cotidianas de ver, pensar y hablar. A través del lenguaje de la ciencia los escolares pueden acceder a una cultura diferente: la cultura científica*." (Santamarti, s/f. p.1)

Caso muy distinto en las aulas de clase donde se llevan a cabo clases de matemáticas. Es fascinante "la conexión entre el lenguaje cotidiano y las matemáticas, entre los "usos cotidianos y especializados". Es allí donde el maestro entra a hacer una especie de ***hablante nativo*** de la lengua (matemática) y es necesario que sirva como puente en la adquisición de tal lenguaje, por medio de los usos cotidianos y lingüísticos puestos al servicio de la enseñanza no solo de la matemática, sino de todos los lenguajes del mundo de la ciencia. (David. P. 1990, p.13)

[1] Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima, Colombia; e-mail: maito092973@hotmail.com
[2] Estudiante de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Lengua Castellana, Instituto de Educación a Distancia – IDEAD, Integrante del semillero "Laboratorio de ciudad", Universidad del Tolima, Colombia; e-mail: jefryduranrock@hotmail.com

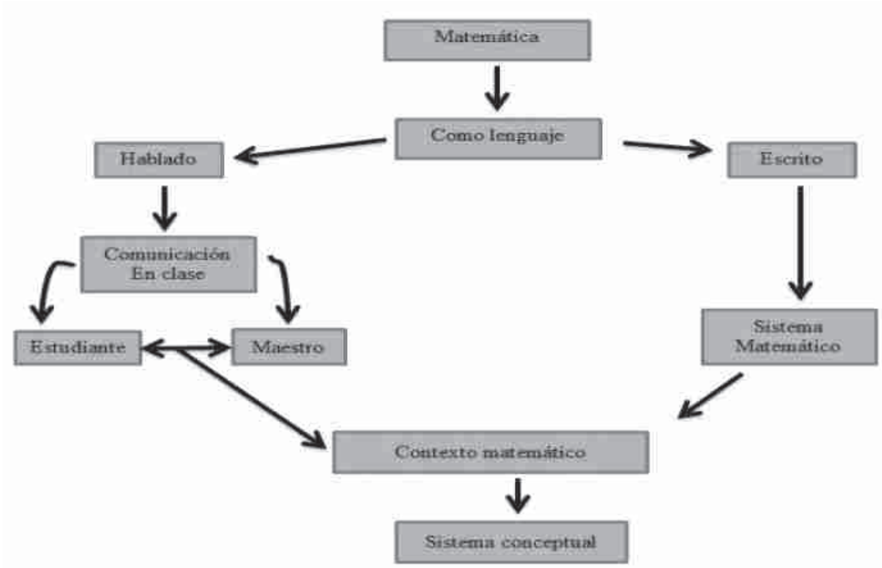


Figura 1.

A todo ello, es preciso decir que la tesis principal de este artículo, es entender la naturaleza lingüística de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, partiendo de la base conceptual que se da mediante el lenguaje hablado y escrito dentro de las aulas de clase y fuera de las cuatro paredes en donde la matemática está puesta a la disposición para develar aspectos de la existencia misma del ser humano, dentro de los roles sociales, de tipo material y simbólica.

Está claro que *"hacer conceptos es una tarea de la investigación científica; rehacerlos, es una tarea didáctica."* Dado que los conceptos son considerados como la primera verdad que tenemos acerca de las cosas o los objetos por conocer. Y en cierto modo la conceptualización es mediadora entre el estudiante y la ciencia, en el caso de las matemáticas los conceptos generan un proceso cognitivo de significación y sentido de la enseñanza-aprendizaje de la matemática misma.

Actualmente no es erróneo concebir la enseñanza matemática como una subdivisión en dos parámetros: el primero de ***"matemática elemental"*** para la educación preuniversitaria, la segunda como una ***"matemática superior"*** o ***"matemática avanzada"*** para educación universitaria. La segunda concepción es perpetuada a partir de la profundización de la primera lo que implica una secuencia de ***conceptos, contenidos, objetivos, temáticas*** y todos los diferentes ámbitos que se desarrollen en torno a esta.

Por esta razón, tomamos específicamente el ***cálculo diferencial*** puesto que en su primera etapa, es fundamental para la formación integral del ser humano y sobretodo posibilita la realización de estudios universitarios en cualquier campo o ámbito de las ciencias exactas, precisamente en la física, pues es de esperar que los estudiantes adquieran y se apropien de los significados y conceptos bases del cálculo diferencial en pro de su vida y formación tanto académica como integral.

En este sentido, tenemos en cuenta la implicación de una concepción errónea del concepto de ***función, límite, derivada***, entre otros y en general del cálculo, que imposibilita a aquellos estudiantes el desempeño a fin de las temáticas universitarias en la física y demás ciencias. La primera verdad del concepto de cálculo diferencial. Función, límite, derivada, entre otros imposibilitando a los estudiantes a que se apropien de este aprendizaje matemático y lo más importante que este sea llevado a campos de la vida social, y a los usos diarios del lenguaje cotidiano para develar la existencia misma del ser humano.

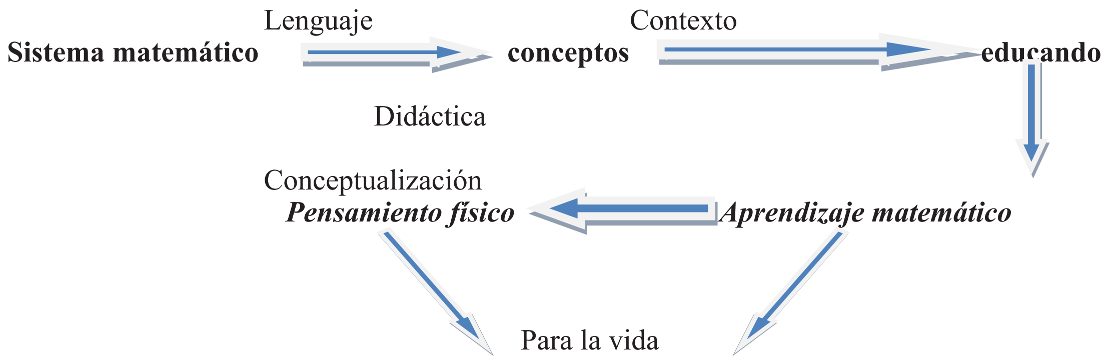


Figura 2.

Evidentemente la ciencia necesita reestructurarse en algunos aspectos y el principal es que debe descentrarse en el dominio razonable de los algoritmos algebraicos y dar un foco característico propicio para la conceptualización de los procesos subyacentes al límite en la noción de derivada. Así crear una ruptura en la enseñanza-aprendizaje de los objetos de la ciencia no como manipulación abstracta de los mismos, sino influenciar también el alcance de estos estudios para el desarrollo humano y preparación para una vida académica universitaria. Para ello se pretende reformar los componentes del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias: objetivos, contenidos, secuencia temática, medios y métodos de enseñanza y todos los procesos que intervienen en la dinámica de dicha enseñanza.

A partir de esta mirada y la experiencia en el aula, las principales causas en nuestro contexto, pueden destacarse los siguientes aspectos relacionados con la labor docente:

- Baja sistematización entre los objetivos, los contenidos, los métodos y la forma de abordar los temas en los libros usados por los maestros.
- Falencias en el dominio de los temas y percepción de los preconceptos de los estudiantes.
- Programas que consisten solamente en listados de temáticas.
- Poca apreciación del lenguaje natural y el lenguaje matemático por parte del maestro.

Esta y algunas otras incapacidades plasman en los programas y en la ejecución de estos, una notable estructura formal de las ciencias, más precisamente en el cálculo diferencial, lo que conlleva a un enfoque abstracto con escasa relación hacia los fenómenos de variación física. Hechos que suceden no solamente en algunos países suramericanos; pues un estudio realizado al currículo de matemáticas del nivel medio por investigadores del programa IBERCIMA así lo confirma:

> *"Hemos constatado que la mayoría de los currículos están concebidos de manera restringida. Frente a la concepción amplia del currículo como proyecto que indica de modo coherente qué, cómo y cuándo enseñar y qué, cómo y cuándo evaluar, la mayoría de los currículos analizados consisten en un listado de temas precedidos por objetivos didácticos y completados, en el mejor de los casos, con sugerencias metodológicas muy puntuales. Existe una ausencia casi generalizada de los elementos que configuran un auténtico currículo: Fundamentación, Objetivos Didácticos, Contenidos de Aprendizaje, Orientaciones Didácticas y Procedimientos de Evaluación".* (Ibercima, (s.f). p. 162

Los textos usualmente usados para las clases de cálculo diferencial manifiestan el concepto de derivada con un énfasis abstracto que da sentido a tener existencia solo dentro de la matemática, escasamente lo relaciona con ejemplos esporádicos de la vida cotidiana, los cuales son desechados y no estudiados a cabalidad ni con el transfondo que debe tener, sin discutir que no se interiorizan las cualidades o propiedades de los objetos estudiados. Los textos desligan el desarrollo de ideas y significados importantes y con precedencia de los conceptos básicos del cálculo diferencial que luego el maestro transforma en procesos de trabajo algorítmico.

A manera de suplir estas dificultades los libros y el docente plantean la interpretación geométrica de la derivada con una justificación y demostración tanto o más rigurosa que la misma definición, sin embargo esta interpretación no revela la naturaleza inédita del concepto de derivada que está ligado a la cuantificación de la rapidez de la variación.

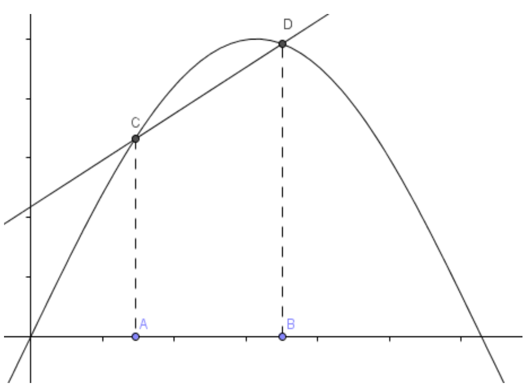


Figura 3. Representación gráfica usual de la derivada.

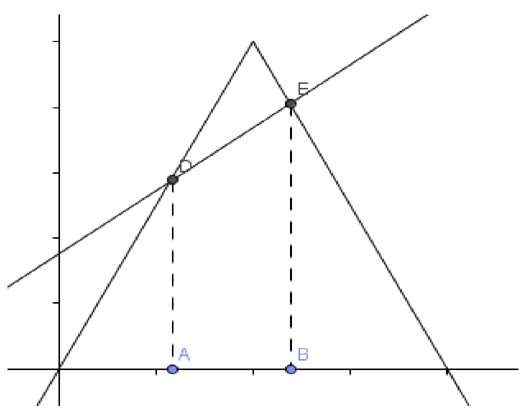


Figura 4. Representación gráfica errónea de la derivada.

Al ver la derivada como una "cuantificación relativa del cambio" encuentra esta su verdadera razón de ser y se da supremacía al concepto. Por eso muchos matemáticos frecuentan definir al cálculo (y al Análisis Matemático en general) como la matemática del cambio. Un concepto muy ambiguo para los libros de texto y algunos profesores precursores de la productividad algorítmica, así los estudiantes difícilmente logran apropiarse e interiorizar el ***concepto*** de derivada en los cursos preuniversitarios.

Por otro lado, varias de las causas que obstaculizan la comprensión (o el aprendizaje en un sentido más amplio) de los conceptos básicos del cálculo diferencial en los estudiantes se han encontrado en el terreno epistemológico ligadas principalmente a las dificultades en la asimilación del conocimiento. A este respecto, desde mediados de la década de los 70's, en la enseñanza de las ciencias mucho se ha escrito sobre las preconcepciones (Gil y De Guzmán 1993), sobre las imágenes conceptuales (Tall y Vinner 1981) y los obstáculos epistemológicos (Sierpinska A. 1985). La mayoría de los investigadores, señalan Gil y De Guzmán 1993, que las preconcepciones se forman en los estudiantes a través de su experiencia cotidiana, incluyendo, tanto sus experiencias físicas como sociales, constituyéndose como un conocimiento pre-científico fuertemente arraigado. Se caracterizan básicamente porque: tienen cierta coherencia interna, son comunes a estudiantes de diferentes medios y edades, presentan cierta semejanza con concepciones que estuvieron vigentes a lo largo de la historia del pensamiento y, son persistentes, pues no se modifican mediante la enseñanza habitual, incluso reiterada. Particularmente A. Sierpinska considera que sí son producto de ciertas actitudes, creencias y convicciones y además, sí estuvieron presentes en varias personas o en toda una cultura en algún periodo de la historia, entonces pueden conducir a obstáculos epistemológicos.

Es por ello, que es necesario traer a la ***consciencia del aula***, todas esas formas de aprendizaje que deterioran y obstaculizan la aprehensión de conocimiento científico, en nuestro caso conocimiento del lenguaje *matemático*. Uno de ellos es la forma como se piensa, habla, lee y escribe ciencia en el aula, puesto que estas habilidades son relegadas a la clase de lenguaje en las instituciones educativas de nuestro país. Es importante dejar que nuestros alumnos piensen en el lenguaje enseñado (lenguaje matemático) y sus relaciones con la natura-cultura porque "el matematismo ya no es descriptivo sino formativo."

En este sentido, es relevante obtener abstracciones significativas que conlleven a promover "*operaciones mentales*" con base en las abstracciones que se realicen de la ciencia estudiada, Feuerstein las denomina como: *"el conjunto de acciones interiorizadas, organizadas y coordinadas, en función de las cuales llevamos a cabo la elaboración de la información que* *recibimos"* (Feurstein,1980). Información dada en los ***conceptos*** que se nos dan de las ciencias y que son obsoletos a la hora de hablar de física-matemática. Y retomando la reflexión anterior donde "rehacer los ***conceptos*** es una tarea de la didáctica".

Por otro lado, los intercambios comunicativos entre los actores del aula, no corresponden a mejorar las expresiones que contribuyen a la comprensión e interpretación de los conceptos físicos-matemáticos, como las metáforas, entre otros usos lingüísticos que optimizan la comprensión científica; a este respecto Lakoff & Johnson (1980) dicen que:

> *"La metáfora impregna la vida cotidiana, no solamente el lenguaje, sino que también el pensamiento y la acción. Nuestro sistema conceptual ordinario, en términos del cual pensamos y actuamos, es fundamentalmente de naturaleza metafórica."* (Lakoff & Johnson, 1980, p.39).

Por tal razón, se requiere reconocer la importancia de los usos lingüísticos en el aula, para advertir en nuestro caso las formas en que se desarrollan los ***conceptos*** de cálculo diferencial. Función, límite, derivada, entre otros, puesto que la "*la metáfora tiene una naturaleza conceptual"*. (p.40). Ahora bien, podemos decir, que la metáfora podría ser un puente para alcanzar un pensamiento físico-matemático por medio de los conceptos del cálculo diferencial, porque se abre el espectro que da sentido a los conceptos trabajados en esta área. Newton nos da un claro ejemplo, al hablar de sus experimentos:

> *"(...) al principio del año 1666 (...) me procuré un prisma triangular de cristal, para emprender con él los celebrados fenómenos de colores. Y para ello, una vez ensombrecido mi aposento y hecho un pequeño agujero en la ventana para dejar pasar una cantidad conveniente de luz solar, coloqué mi prisma a la pared de entrada de la luz para que pudiera ser refractada hacia la pared opuesta. Constituyó al principio un entretenimiento muy agradable ver los vivos colores que allí se producían; pero al cabo de un rato me apliqué a considerarlos con más circunspección. Quedé sorprendido al verlos de una forma alargada (...) (citado por P. Feyerabend, en* Contra el método*. Barcelona: Ariel, 1975)*

Utiliza una serie de elementos retóricos y metafóricos que van desde la conceptualización de los colores que estos develan al pasar por el prisma triangular, la cantidad de luz, y los resultados que obtuvo al ver la forma alargada. Este es solo un ejemplo de la riqueza del texto de Newton.

Ahora bien, Santamari nos dice que:

> *"El proceso de construcción del conocimiento científico comporta pasar de hablar un lenguaje personal, impreciso y con muchas expresiones importadas del conocimiento cotidiano, a ser capaces de utilizar el de la ciencia, mucho menos polisémico. Pero nos equivocaríamos si pensáramos que sólo se trata de incorporar un vocabulario nuevo y preciso. Las palabras sólo tienen sentido si expresan una idea, por lo que en la enseñanza de las ciencias no se puede separar un aprendizaje del otro y no se puede suponer que nos apropiamos de las ideas tan sólo nombrándolas*." (Santamari, 2005, p.3)

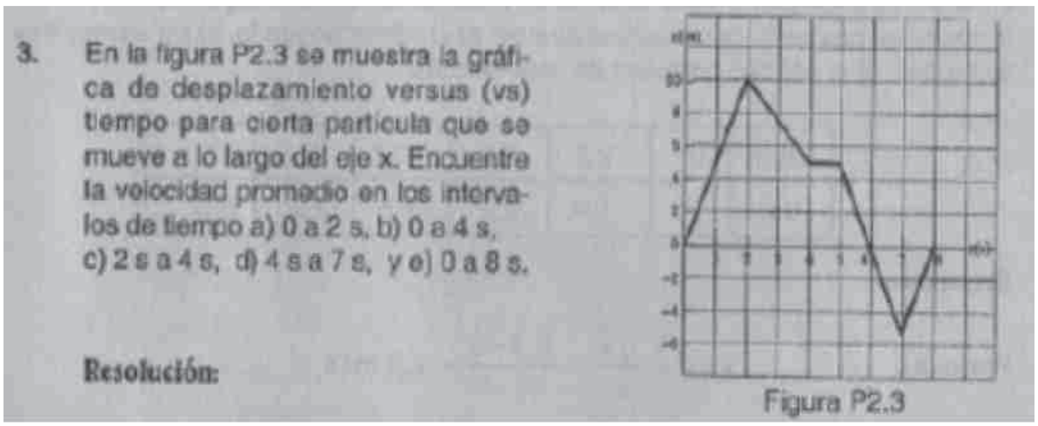
A este sentido, no solo es cuestión de reemplazar esas expresiones lingüísticas de tipo metafórico, sino que estas sirvan de puente dentro de las nuevas sistematizaciones conceptuales de los educandos.

Por otro lado, uno de los mayores obstáculos de la enseñanza de la física en la etapa escolar se encuentra en la mayoría de libros y en el currículo de esta área, son las temáticas que se trabajan, pues son poco novedosas y otorga a la física una mirada prehistórica poco encantadora para los estudiantes. "Miremos por ejemplo, los textos de Física. Cuando abres un libro de Física típico que se enseña en la escuela, y miras los temas que se encuentran dentro, yo diría 60% ó 70% son temas de la física de finales del siglo XIX, es decir, se enseña la física de siempre hasta 1900. El último siglo solamente se encuentra en las últimas páginas y los últimos 10 ó 20 años anteriores no existen. Se puede decir que esto es un escándalo del cual, aparentemente, nadie se da cuenta. Es común encontrar un libro de física, digamos, con 80 páginas dedicadas a la mecánica newtoniana, que ha terminado en 1700, después pueden seguir muchas páginas de electrodinámica, que ha terminado en 1869, y quedan solamente 40 páginas para toda la física del siglo XX, de 100 años de física pura". (Friedrich, H. 2005, p.1)

Ahora, si relacionamos los problemas del aprendizaje de la matemática y el lenguaje junto a estos aspectos de la física, logramos ver colosales agujeros negros en la educación; ***"la enseñanza de la derivada está a la deriva"*** y la importancia de este concepto es fundamental para propiciar el pensamiento matemático y físico. La física preuniversitaria (y algunas veces universitaria) abarca una rama esencial de esta, conocida cotidianamente como “mecánica clásica” para saber brevemente que estudia este foco de la física basta con definir el término mecánica para palpar la relación con la matemática y específicamente con el cálculo diferencial.

“La Mecánica consiste en el estudio del movimiento, o de la evolución de la posición de partículas o sistemas (muchas partículas) en el tiempo. Actualmente, la Mecánica Clásica se enmarca dentro de un campo más general denominado Sistemas Dinámicos, que involucra el estudio de la evolución o cambios de estado de variables en el tiempo en sistemas generales, de acuerdo a reglas deterministas: estos incluyen sistemas físicos, químicos, biológicos, sociales, económicos, etc.” (Mecánica Clásica, Mario Cosenza, Universidad de los Andes, Departamento de Ciencias, Facultad de Física.)

Así queda enmarcada la fuerte relación de este concepto con la mecánica clásica desde estos planteamientos; con ayuda de unos problemas y su respectiva gráfica una aplicación física de la mecánica que podemos ver lo que puede conllevar a una apreciación errónea de los conceptos en fenómenos físicos en un momento dado (situación de clase).



3. En la figura P2.3 se muestra la gráfica de desplazamiento versus (vs) tiempo para cierta partícula que se mueve a lo largo del eje x. Encuentre la velocidad promedio en los intervalos de tiempo a) 0 a 2 s, b) 0 a 4 s, c) 2 s a 4 s, d) 4 s a 7 s, y e) 0 a 8 s.

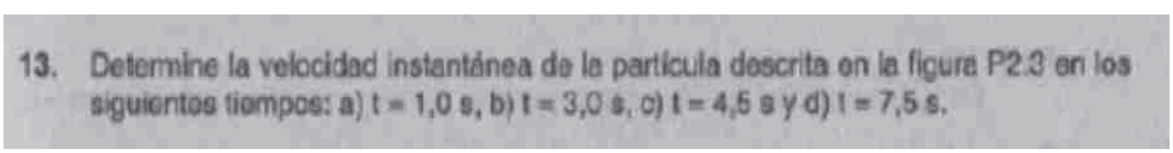
Resolución:

Figura 5. Problema sacado de Física de Serway, Volumen 1.

El cual implícitamente conlleva a un pensamiento matemático y a un nivel de cambio o variaciónal, Carlos Vasco.

> *“El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad”*

No es necesario escudriñar a fondo el problema para ver que allí intervienen grandes aspectos del cálculo como: pendiente, variación, intervalo, sin incluir otros aspectos filosóficos de la matemática y de la física, los cuales no son enseñados y por eso tal vez podamos como profesores de matemáticas o física y cualquier ciencia exacta (0 el mismo estudiante) preguntarnos ¿Qué pasa con la velocidad instantánea en cualquier punto del intervalo de tiempo de 0 a 2? Y más aún ¿Cuál es la velocidad instantánea en el punto 2, 4, 5, 7? Si nuestro verdadero discurso es trabajar para la enseñanza y no enseñar para el trabajo.

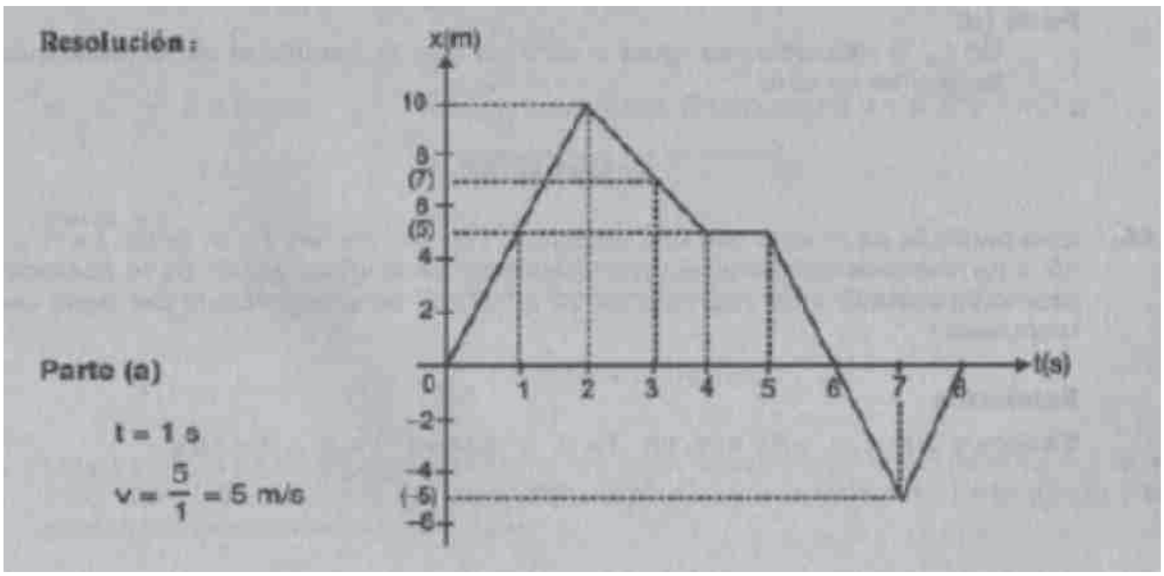


13. Determine la velocidad instantánea de la partícula descrita en la figura P2.3 en los siguientes tiempos: a) t = 1,0 s, b) t = 3,0 s, c) t = 4,5 s y d) t = 7,5 s.

Figura 6

Aquí, otro problema sobre la misma gráfica en donde involucra tal vez algunos elementos de los cuales mencionamos; sin embargo, no se ha trabajado a cabalidad, no se trata de procesos algorítmicos sino de un proceso de reflexión de los conocimientos como una interpretación para el uso de estos en la vida. ¿Qué sucede en el instante de tiempo $t = 2{,}0$?

Abordemos ahora la solución de este problema en donde se evidencia la colosal implicación del concepto de derivada para impulsar un razonamiento físico-matemático. Cuando el movimiento es lineal uniforme (M.L.U) la representación gráfica de la derivada está sobre el mismo segmento de recta ¿luego la derivada no es la pendiente de la recta tangente? y si así lo es, ¿la tangente no corta en un solo punto la gráfica?, así la pendiente de esta es igual a la del segmento. Entonces, la velocidad instantánea de la partícula depende de la variación del espacio en una variación de tiempo. Lo cual permite solucionar este problema con una simple división y desleír los conceptos del cálculo, precisamente aparatar al estudiante del pensamiento físico.



Parte (b) $t = 3$ s $v = \frac{10-5}{2-4} = \frac{5}{-2} = 2{,}5$ m/s

Parte (c) $t = 4{,}5$ s $v = \text{constante} = 0$

Parte (d) $t = 7{,}5$ s $v = \frac{-5-0}{7-8} = 5$ m/s

Figura 7

Comprendida la importancia del lenguaje (matemático) en el aula vemos la ligera e inquietante necesidad de elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza del cálculo diferencial basados en los diferentes autores y aspectos ya mencionados, que contribuyan al desarrollo pleno de esta temática. Asumiendo que estos planteamientos sobre la deriva van encaminados en pro del desarrollo de ideas variaciones, principalmente la noción de rapidez de la variación, puede contribuir al logro de este propósito.

"Desde mi actual filosofía de las matemáticas y desde mi concepción del mundo del Siglo XXI, pienso que es necesario impulsar decididamente el cambio de las matemáticas estáticas a las dinámicas, del pensamiento de las verdades matemáticas eternas e inmutables al pensamiento variaciónal, y de la idea tradicional de aplicar las matemáticas a la matematización y modelación de la realidad para construir nuevas matemáticas o reconstruir las antiguas"

Conclusiones

Sin ánimo de alimentar la especificidad de este trabajo hemos llegado al momento épico - eufóricos y anonadados- y crucial del mismo. Los resultados develan y argumentan algunos de nuestros planteamientos y establece otros, pues el análisis de los resultados muestra en dominio o la influencia en solo unos enfoques como el formal, el algebraico y poco del infinitesimal, mientras que los enfoques conceptual, geométrico y variacional no son relevantes en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

A grandes rasgos los procesos algorítmicos y formales están coyunturalmente relacionados con el aprendizaje de las matemáticas, así los estudiantes están enfocando sus conocimientos a estos procesos que, en general, son de menos importancia que pensar matemáticamente o pensar físicamente para la vida diaria.

Sin mucho trasfondo y enfatizando en lo que para este trabajo es de absoluta importancia, analizamos el enfoque conceptual y vemos la escasa relación de estos conceptos matemáticos con la vida diaria y peor aún, difícilmente logran asociar un sinónimo de la derivada a palabras de uso cotidiano a un ***lenguaje natural*** y cotidiano. Por lo que los estudiantes no logran interiorizar estas definiciones o conceptos que son prioritarios en la continuidad de su formación y educación.

Las preguntas sobre aplicación estaban fundamentadas en la percepción de los estudiantes de la derivada en casos usuales. Pero los estudiantes aún no notan que la educación es una forma de adquirir conocimiento que puede verse reflejado a corto (entrar a la universidad) y a largo (mejorar su calidad de vida como mínimo) plazo.

Referencias

Barrero, P. (2008, 3 de diciembre). *La competencia oral y escrita en la educación superior.* Ministerio de Educación Nacional. Recuperado el 2 de febrero del 2013, de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-189357_archivo_pdf_comunicacion.pdf

Herrmann, F. (2005, 12 de octubre). *Los textos de física son obsoletos.* Universidad, número 07.

Lakoff, G & Johnson, M. (1980). *Metáforas de la vida cotidiana. M*adrid, España: Ediciones Cátedra, S. A.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid, España: Morata, S. A, & Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia Ciudad Universitaria.

Sanmarti, N. (2007). *Hablar, leer y escribir para aprender ciencia.* Universidad Autónoma de Barcelona: Publicado en: Fernández, P. (coodra.) (2007). *La competencia en comunicación lingüística en las áreas del currículo.* Colección Aulas de Verano. Madrid: MEC, Tomado el 13 de julio del 2013, http://www.mrpmenorca.cat/index2.php?option=com_docman&task=doc_view&gid=118&Itemid=31

Vasco, C. E. (s.f.). *El pensamiento variacional y la modelación matemática***.** Universidad del Valle (Cali), Universidad de Manizales (Manizales- Colombia).

¿Monogamia o poligamia entre definiciones y objetos matemáticos?

Alexander Umbarila Forero[1]
Nancy Edith Tovar Ojeda[2]
Edgar Alberto Guacaneme Suárez[3]

Introducción

En el estudio que en el marco de nuestro trabajo de grado realizamos sobre el papel de las razones y proporciones geométricas en la definición de las cónicas en la obra de Apolonio de Perga, nos encontramos con un hecho aparentemente menor: en una obra matemática se emplea más de una definición de un mismo objeto matemático; en efecto, Apolonio, en su magistral obra sobre las secciones cónicas (Heath, 1896), utiliza diferentes definiciones de circunferencia (aunque también diferentes definiciones de círculo). Este hecho comenzó a cobrar importancia cuando lo contrastamos con nuestra creencia (hasta ese momento un tanto inconsciente) de que a cada objeto matemático le corresponde, de manera monógama (o más técnicamente biyectiva), una y solo una definición. Un nuevo matiz se le agregó a tal hecho, cuando tuvimos acceso a un breve artículo (Van Dormolen & Arcavi, 2000) en el que, desde nuestra interpretación, se plantea que escolarmente las definiciones de los objetos matemáticos deben atender al significado que la actividad matemática realizada sobre el objeto le asigne. Adicionalmente, nuestra reflexión sobre tal hecho se complejizó cuando tuvimos acceso a dos trabajos de grado, uno de pregrado (Espitia Florián & Solano Bernal, 2013b) y otro de postgrado (Ortiz Gómez & Yopasá Murcia, 2013), en donde se ampliaba el repertorio de definiciones de circunferencia (y eventualmente de círculo).

En el presente escrito inicialmente se acopian algunos aspectos sobre las definiciones de circunferencia, para luego presentar algunos elementos de nuestra reflexión sobre la relación monógama o polígama entre definiciones y el objeto matemático circunferencia.

Definiciones de circunferencia

En la obra de Apolonio se identifica la alusión a los objetos círculo y circunferencia desde el inicio de la obra, cuando se establecen estos como parte de los objetos implicados en la construcción de un cono (o más precisamente de un cono doble):

> If a straight line indefinite in length, and passing always through a fixed point, be made to move round the circumference of a circle which is not in the same plane with the point, so as to pass successively through every point of that circumference, the moving straight line will trace out the surface of a double cone, or two similar cones lying in opposite directions and meeting in the fixed point, which is the apex of each cone. (Heath, 1896, p. 1)

Suponemos que acá los términos "circunferencia" y "círculo" atienden a la definición euclidiana reportada en *Elementos*[4], hoy en día parafraseada en la definición usual[5] que alude a un radio constante y un punto centro. Esta suposición se basa en que en la demostración de la proposición I.4 (Heath, 1896, pp. 1-2), a través de la cual establece que la circunferencia (o el círculo) es la sección resultante del corte de un cono con un plano paralelo a la base del cono, Apolonio emplea el hecho de que uno de los segmentos genéricos utilizados es de longitud constante y uno de sus extremos es un punto fijo.

Por otra parte en la demostración de la proposición I.5 (Heath, 1896, pp. 2-3), a través de la cual se define

1. Estudiante Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; e-mail: dma217_aumbarila@pedagogica.edu.co
2. Estudiante Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; e-mail: dma927_ntovar@pedagogica.edu.co
3. Magister en Educación Matemática. Profesor, Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; e-mail: guacaneme@pedagogica.edu.co

4. "Un círculo es una figura plana comprendida por una línea [que se llama circunferencia] tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí." (Puertas, 1991, p. 193).
5. Sea *P* un punto de un plano dado y *r* un número positivo. La circunferencia con centro *P* y *r* radio es el conjunto de todos los puntos del plano que están a la distancia *r* del punto.

y caracteriza la sección subcontraria [6], Apolonio emplea una definición alterna de circunferencia al reseñar que se satisface una condición de media proporcional entre unos segmentos; en efecto, en tal demostración señala que se satisface la condición $DM \cdot ME = PM^2$, o lo que es casi-equivalente que se satisface la proporción $\frac{DM}{PM} = \frac{PM}{ME}$, que establece un vínculo con la circunferencia, como se aprecia en la Figura 1.

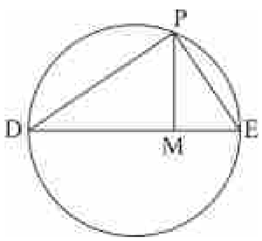


Figura 1 Circunferencia definida a través de la media proporcional

Siendo un tanto laxos, hemos identificado hasta acá en la obra de Apolonio cuatro definiciones de circunferencia. Una alude a los puntos que equidistan de un punto central, otra la establece como sección resultante del corte del cono con un plano paralelo a su base; una tercera la identifica con la sección subcontraria y otra con los puntos que satisfacen una proporción particular.

En un trabajo de grado (Ortiz Gómez & Yopasá Murcia, 2013) de la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, identificamos otras definiciones matemáticas de circunferencia[7]. Allí, por ejemplo se incluye:

- la definición que se da en el ámbito de la Geometría analítica (Una circunferencia es el conjunto de puntos en el plano *x*, *y* que están a una distancia fija *r* de un punto fijo *(h ,k)*. La distancia *r* se llama radio y el punto fijo *(h ,k)* se llama centro de la circunferencia, además *r* estará dado por $r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$,
- la definición algebraica asociada a la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+EY+F=0$ que establece la circunferencia como el conjunto de parejas ordenadas de variable real que satisfacen tal ecuación (bajo algunas condiciones de los coeficientes),
- y la definición topológica que establece que un círculo es un caso particular de una bola abierta definida en un espacio métrico *(x,d)* y, por tanto, una circunferencia es un caso particular de la frontera de dicha bola.

En otro trabajo de grado, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, identificamos el reporte de una definición alterna de circunferencia, como "el lugar geométrico de los puntos $C=(x,y)$ para los cuales su distancia a dos puntos dados $A=(x_1,y_1)$ y $B=(x_2,y_2)$ satisface la condición $d(A,C)=a \cdot d(B,C)$ con $a \in \mathbb{R}^+$" (Espitia Florián & Solano Bernal, 2013b, p. 83). Vale la pena reseñar que en esta definición los puntos *A* y *B* no pertenecen a la circunferencia ni ninguno de los dos constituye su centro, como lo reseñaron las autoras del trabajo en una ponencia (Espitia Florián & Solano Bernal, 2013a).

Nuestra reflexión (en curso)

Hoy en día tenemos claro que existen diferentes definiciones matemáticas de circunferencia y estamos abiertos a la posibilidad de encontrar otras; por ejemplo, recientemente hemos sido conscientes de que pensar en la trayectoria que describe una bicicleta al moverse con la misma velocidad y teniendo el manubrio inclinado en la misma dirección, nos aproxima a la definición de circunferencia como curva de curvatura constante, en el ámbito de la Geometría diferencial.

La diversidad de definiciones identificada nos lleva a entender que el manejo de un concepto matemático (en este caso el de circunferencia) no se restringe a la comprensión y empleo de una única definición del mismo; igualmente, nos permite entender que cada definición captura algunos aspectos o propiedades del objeto en cuestión, pero no todos los que se expresan en todos sus ámbitos matemáticos de aparición.

Ahora bien, en nuestra calidad de futuros profesores de Matemáticas, este asunto es de vital importancia, pues nos permite ser conscientes que el aprendizaje de un objeto matemático por parte de nuestros estudiantes no se restringe a la repetición y uso de una "buena" definición, sino que incluye la construcción de buenas y variadas definiciones del objeto, a partir del significado que se asocie a diversas actividades matemáticas realizadas con este.

[6] "There are two series of circular sections of an oblique cone, one series being parallel to the base, and the other consisting of the sections subcontrary to the first series." (Heath, 1896, p. 3)

[7] En ese mismo trabajo se acopian también interesantes definiciones no matemáticas y significados de circunferencia, asociados a actividades culturales y sociales de gente de diversas épocas y etnias.

No obstante lo anterior, aún persiste una duda: si suponemos que significados diferentes generan objetos diferentes, y por tanto definiciones diferentes, ¿existirán tantos objetos matemáticos como definiciones y, en consecuencia, relaciones monógamas entre estos? o ¿persistirán las relaciones polígamas entre estos y estas?

Referencias

Espitia F., K. T., & Solano B., A. S. (2013a). *¿Circunferencias sin centro ni radio?* Comunicación corta presentada en la 4ª Escuela Colombiana de Historia y Educación Matemática, Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Espitia F., K. T., & Solano B., A. S. (2013b). *Dos cursos de Matemáticas-Tecnología analizados desde la perspectiva curricular colombiana.* Licenciatura en Matemáticas Trabajo de grado no publicado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.

Heath, T. L. (1896). *Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections*. Cambridge: University Press.

Ortiz G., N. J., & Yopasá M., M. (2013). *Memorias de un curso sobre historia de las curvas matemáticas.* Especialización en Educación Matemática Trabajo de grado no publicado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.

Puertas, M. L. (1991). *Euclides. Elementos. Libros I-IV*. Madrid: Editorial Gredos S.A.

Van Dormolen, J., & Arcavi, A. (2000). What is a circle? *Mathematics in School, 29*(5), 15-19.

Transformaciones de funciones: una exploración por medio de software educativo

***Edwar Fabián Panqueba Moreno*[1]**

Las funciones es uno de los objetos de estudio de mayor interés no solo desde las matemáticas mismas, en el campo de la ingeniería, la biología, la física, la química, e incluso en situaciones de la vida cotidiana, entre otros. Se han utilizado funciones para modelar y describir el comportamiento de los fenómenos que son analizados desde cada uno de los ámbitos mencionados anteriormente, de ahí la importancia de ser abordadas y trabajadas en los ambientes escolares de educación matemática.

Las transformaciones de funciones como tópico abordado dentro de los planes de estudio de la educación básica secundaria y media, en muy pocas ocasiones, es introducido con ayuda de software de geometría dinámica como Cabrí o GeoGebra. Teniendo en cuenta la importancia que tiene la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función dentro del currículo de matemáticas, surge la idea de trabajar las transformaciones de funciones con ayuda del software GeoGebra, en el marco de una de las prácticas iniciales del espacio académico *Tecnología en Educación Matemática* de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, con estudiantes de undécimo grado del Colegio Grancolombiano de la ciudad de Bogotá D. C., Colombia.

El presente artículo pretende dar a conocer algunos aspectos y detalles obtenidos de la experiencia de aula adquirida con la aplicación de un taller de instrucción, que junto con el uso de la tecnología promovieron el trabajo con este tópico matemático, acompañado además de algunas reflexiones didácticas relacionadas con el diseño del taller y la tecnología como instrumento de mediación en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Marco didáctico para el diseño de la actividad

Como objetivo de aprendizaje, se pensó en que los estudiantes pudieran identificar en la representación algebraica de una función de grado dos, las características que determinan el comportamiento de la respectiva representación gráfica, es decir, reconocer en la expresión algebraica los parámetros que generan modificaciones en la gráfica de una función de grado dos, representada en un plano cartesiano.

Desde los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) y los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006), se establece que las actividades implementadas en el aula de clase para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función, permiten en el estudiante el desarrollo del denominado pensamiento variacional, privilegiándose en este tipo de tareas el uso de tablas y gráficas en el plano cartesiano, para la representación de situaciones de variación.

Las modificaciones que se pueden realizar a cada uno de los parámetros de la expresión algebraica de la función, generan un cambio o variación en su representación gráfica, y es aquí donde está presente el pensamiento variacional, si el estudiante logra reconocer tales parámetros, que al proporcionarles diferentes valores, se obtienen parábolas que difieren entre sí, al ser comparadas unas con otras.

Por otro lado, Bresan y Gallego (2010) (citado por Mora, 2012, p. 3) plantean que el razonamiento inductivo consiste en pasar de casos particulares a la presentación de una propiedad común de tales casos particulares, a través de la formulación de una hipótesis, y a la transferencia de propiedades de una situación a otra, ligado todo lo anterior con el proceso de generalizar. De acuerdo con Mason (1989) (citado por Mora, 2012, p. 3) "*generalizar significa descubrir una nueva ley que nos indique qué parece ser cierto (una conjetura); por qué parece ser cierto (una justificación); dónde parece ser cierto, esto es, un planteamiento más general del problema*".

La generalización está entonces relacionada con otros procesos propios de la actividad matemática como inducir, observar, descomponer, hacer analogías,

[1] Estudiante Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; e-mail: edwarfabian13@hotmail.com

descontextualizar e identificar características comunes. (Mora, 2012).

Mason, Graham, Pimm & Gowar (1988) (citado por Mora, 2012, p. 16) establecen que en el proceso de generalización, es necesaria la presencia de un proceso a lo largo de la escolaridad, que permita que los estudiantes puedan tener una experiencia en lo que significa hacer matemáticas. Así pues, estos autores señalan algunas etapas iniciales en el proceso de generalización, estas son: percepción de una regularidad, referida a la identificación de una regularidad, el reconocimiento de semejanzas y diferencias entre los objetos que se observan, por ejemplo, desde la visualización de un gráfico. La expresión de la regularidad, en la que los estudiantes comunican sus ideas sobre lo que ven, de manera oral. El registro de la regularidad, caracterizada por la escritura de la regularidad que se observa, no necesariamente con un lenguaje matemático riguroso. Y por último, la comprobación de la regla hallada, en la cual los estudiantes verifican la regularidad que han descrito en la fase anterior, probándola, por ejemplo, en otros casos que no fueron tenidos en cuenta para el descubrimiento de la regularidad en la primera etapa.

Finalmente, como último aspecto a tener en cuenta para el diseño de la actividad, es bien sabido que la tecnología se ha venido incorporando paulatinamente a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Autores como Luis Moreno (2002) señalan a las herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación entre el estudiante y su aprendizaje, puesto que con ayuda de la tecnología, es posible realizar una exploración mucho más amplia de una determinada situación, permite comprobar o refutar conjeturas que son inferidas a partir de ciertas características, convirtiendo al estudiante en el actor principal de su propio proceso de aprendizaje.

Descripción del diseño de la actividad propuesta

Para lograr el objetivo de aprendizaje trazado, la actividad propuesta se basó en la elaboración y aplicación de un taller de instrucciones, en el cual se describió paso a paso las acciones que los estudiantes debían seguir, apoyados en el uso del software GeoGebra. En primer lugar, se pidió a los estudiantes que graficaran en la pantalla del programa la función $f(x)=x^2$. La gráfica de esta función es una parábola con vértice en el origen de coordenadas, y fue denominada "función original" debido a que en la representación algebraica de esta función, solamente interviene un parámetro, si se tiene en cuenta, que la representación algebraica de la función anterior corresponde a una ecuación de la forma $y=ax$, donde en este caso a tiene un valor de 1. (Azcárate y Deulofeu, 1990). Posteriormente, se les pidió que graficaran en el software, funciones cuya expresión algebraica es de la forma $f(x)=x^2+c$, reemplazando el valor de c por dos, tres y cinco, describiendo las diferencias observadas entre la gráfica original y las gráficas elaboradas hasta el momento. Esta primera parte del taller de instrucción, se elaboró con el fin de dar paso a la primera etapa de generalización, esta es, la percepción de una regularidad, basada en la posición de la gráfica en el plano cartesiano al hacer modificaciones del parámetro c.

Para terminar la primera parte del taller, se les preguntó a los estudiantes, sin elaborar la gráfica, sobre el comportamiento de la gráfica de la función en el plano al dar un valor a c cualquiera, mayor que uno, comprobando la conjetura obtenida con ayuda del software. Los estudiantes trabajaron en parejas, lo que permitió que se diera la segunda etapa de la generalización, esta es, la expresión de una regularidad, en la medida en la que ellos pudieron socializar entre los integrantes de cada pareja, las semejanzas y diferencias de cada una de las gráficas hechas en las instrucciones anteriores. Al contestar la pregunta, los estudiantes debían escribir en la hoja de trabajo para la actividad, la regularidad encontrada, dando paso a la tercera etapa del proceso de generalización, el registro de la regularidad, de la misma manera en la que estuvo presente la última etapa del proceso, la comprobación de la regla hallada, cuando se utilizó el programa de cómputo para la verificación de la conjetura utilizando otros ejemplos.

Unas instrucciones similares a las descritas anteriormente se incluyeron en el taller, con el fin de realizar un trabajo un poco más completo, incluyendo modificaciones a otros parámetros, por ejemplo, asignar valores al parámetro c menores que uno, asignar valores para el parámetro a en la función $f(x)=ax^2$, comprendidos entre cero y uno, mayores que uno y valores negativos. De la misma forma que en la primera parte del taller, las siguientes instrucciones fueron pensadas teniendo en cuenta las etapas de la generalización.

Resultados encontrados y conclusiones finales

Al analizar las producciones de los estudiantes, con relación a cada una de las transformaciones trabajadas en el taller, conjeturas como "Si se suma un número *c* entonces la gráfica se desplaza tantas unidades como lo indique el número por el cual se suma" o "Si se suma un número *c* entonces la gráfica partirá del punto *(0,c)*, donde *c* es el número por el que se suma la función original" permiten evidenciar que los estudiantes lograron notar la modificación que sufre la representación gráfica de una función en el plano cartesiano cuando se introduce un parámetro *c* a la representación algebraica.

Descripciones como "al escribir un número antes de *x* mayor que cero, observamos que la gráfica se empieza a cerrar o reducir en el eje *x* y cada vez que aumentamos el número se reduce más" o "cuando escribimos un número mayor que cero y menor que uno, la gráfica aumentará en *x*" permiten evidenciar que los estudiantes lograron notar la modificación que sufre la representación gráfica de una función cuando se modifica el parámetro *a*, perteneciendo este a una representación algebraica de la forma $y=ax$, en particular cuando a toma valores mayores que uno o están entre cero y uno.

Por último, conjeturas como "si el número que va antes de *x* es negativo, entonces las parábolas abrirán en sentido contrario a la función original" permiten evidenciar que los estudiantes lograron notar la modificación que sufre la representación gráfica de una función en el plano cartesiano, al modificar el parámetro *a*, en particular cuando toma valores negativos.

De las respuestas analizadas, se puede concluir que la mayoría de los estudiantes participantes de la aplicación del taller, identifican los parámetros en la representación algebraica, que determinan las transformaciones que sufren las representaciones gráficas de dichas funciones. Estos resultados obtenidos, permiten corroborar la utilidad y el gran potencial que tiene el uso de software de matemáticas, para la enseñanza y el aprendizaje de las mismas, además de ser propicio para llevar a cabo los procesos de generalización, en la medida en la que posibilitan la exploración y la comprobación de las conjeturas. Todas y cada una de las instrucciones del taller promovieron el paso de los estudiantes por cada una de las etapas del proceso de generalización, y esto se refleja en las conjeturas escritas por cada grupo de estudiantes participantes de la actividad.

Así pues, se logró la construcción de un saber matemático en donde el estudiante fue el protagonista del proceso, utilizando otras herramientas y recursos que no son tan usuales en el aula de clase de matemáticas.

Referencias

Azcárate, A., Deulofeu, J. (1990). *Funciones y Gráficas*. Madrid: Síntesis.

MEN. (1997). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Magisterio

MEN. (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. Bogotá: Enlace editorales Ltda.

MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá.

Mora, L. (2012). Álgebra en primaria. Documento en el marco del Programa Todos a Aprender del MEN.

Moreno, L. (2002). Evolución y tecnología. *Seminario Nacional de Formación de Docentes: uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas.* MEN; 67-80.

Importancia del desarrollo de la práctica docente en la formación de los licenciados en matemáticas

***Arlex Jhonathan Gutiérrez Rengifo*[1]**

"Las Matemáticas no son un recorrido prudente por una autopista despejada, sino un viaje a un terreno salvaje y extraño, en el cual los exploradores se pierden a menudo"
W.S. Anglin

Cuando los estudiantes de las licenciaturas de la Universidad del Tolima están próximos a iniciar las prácticas docentes establecidas en los pensum de los programas, se generan temores, expectativas y un sinnúmero de cuestionamientos que apunta a conocer la importancia de este ejercicio pedagógico, para la formación personal y profesional.

Aparentemente, la importancia es evidente y esto reduce no solo el concepto de la práctica docente, sino que también la instrumentaliza, y los estudiantes practicantes terminan cumpliendo con una práctica burocrática en palabras de Achilli, (Achilli, 1986), es decir, llenando formatos y entregando planeaciones, acciones que no desarrollan las habilidades que deberían adquirir los maestros en formación, salvo, algunos casos donde el acompañamiento de un asesor y el docente orientador de la práctica conllevan al licenciado en formación a realizar este proceso de manera reflexiva.

De ahí que, en el presente texto se pretende responder a la pregunta ¿por qué es importante el desarrollo de la práctica docente en la formación de los licenciados en matemáticas?, partiendo de la conceptualización de la práctica y de algunas consideraciones sobre las posibilidades que brinda este ejercicio.

Con el crecimiento de la demanda de la profesionalización de los docentes (Moreno, 2011), las Instituciones de Educación Superior y las Facultades de Educación se han preocupado por la evolución constante de los currículos que sustentan los programas de licenciaturas (Restrepo, 1982), para tal fin, se ordenan, clasifican y distribuyen asignaturas que desarrollan la formación disciplinar y pedagógica brindándole al maestro en formación herramientas teóricas que después pondrá en escena al llegar a la práctica docente.

En los programas de Licenciaturas, específicamente en el programa de Licenciatura en Matemáticas, la práctica docente se constituye en una asignatura que debe ser de curso obligatorio y que no puede ser homologada por trabajos de investigación o experiencia docente previa que el estudiante en formación haya adquirido. Debido a la importancia de este proceso, la práctica docente se encuentra reglamentada bajo el Acuerdo N° 791 de diciembre 03 de 2012, en donde se establecen los parámetros, requisitos, derechos, deberes que regulan el curso de la práctica por parte de los licenciados en formación.

Para posibilitar el desarrollo de la práctica docente la Universidad del Tolima ha establecido convenios con Instituciones de Educación Media, con el fin, de que los licenciados en formación, aterricen el saber disciplinar adquirido en la Universidad y perfilen su quehacer pedagógico.

Hacia una conceptualización de la práctica docente

Conocido el marco legal y algunas generalidades de la práctica docente, se hace necesario precisar ¿qué se entiende por práctica docente?

Para Elena Achilli la práctica es el "trabajo que el maestro desarrolla cotidianamente en determinadas y concretas condiciones sociales, históricas e institucionales, adquiriendo una significación tanto para la sociedad como para el propio maestro" (Achilli, 1986). Esta Práctica Docente para Achilli va mucho más allá de la práctica pedagógica dada su significación social, de modo que está compuesta por:

- Práctica pedagógica: "Proceso que se desarrolla en el contexto del aula y en que se pone de manifiesto una determinada relación maestro-conocimiento-alumno, centrada en el "enseñar" y en el "aprender"" (Achilli, 1986)

[1] Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima, Colombia; e-mail: Jhonathan20_12@hotmail.com

- Práctica Burocrática: “Es el conjunto de actividades y relaciones que alejan al maestro de la especificidad de su quehacer: el trabajo en torno al conocimiento” (Achilli, 1986)

Para Ana Beatriz Abarca, quien cita a Jimeno Sacristán, la práctica docente es un rasgo propio del maestro, la pluridimensionalidad y la simultaneidad hacen que dentro de la práctica docente se generen tensiones y contradicciones haciendo que “los rasgos constitutivos de estas prácticas se entrecrucen entre el sujeto social, su historia y el lugar que ocupa en la institución educativa en la que trabaja” (Abarca s.f)

Según el Acuerdo 791 de diciembre de 2012 la práctica docente es “el proceso de formación cuyo horizonte ofrecerá al estudiante en el dominio de sus competencias intelectuales y sociales para el desarrollo de sus habilidades y destrezas…” Y más adelante plantea que, la práctica docente “se propone una formación integral que oriente al estudiante a buscar la verdad, a comportarse éticamente, a desarrollar su capacidad de liderazgo para servir, a la adquisición de pensamiento autónomo y creativo, a la disciplina personal, al orden y al equilibrio con los hombres, las cosas y el mundo físico”.

En este orden de ideas, la práctica docente en la Universidad del Tolima contempla entonces todos los ámbitos y las dimensiones que este proceso requiere, por lo tanto, cabe preguntarse, si la práctica docente es tomada como un proceso que apunta a la formación integral, ¿Por qué los estudiantes practicantes siguen teniendo vacíos conceptuales referente a la práctica docente? ¿Por qué los estudiantes practicantes no vislumbran la importancia de este proceso? ¿Existe error en la comunicación docente-estudiante practicante? O ¿este vacío del estudiante practicante se deberá a las “representaciones internalizadas por los docentes a partir de sus trayectorias institucionales y de formación atravesadas por su recorrido escolar, es decir conjugaciones y conforman productos históricos y por tanto transitorios y arbitrarios”? (Abarca, s.f)

Un primer acercamiento

Después de conocer algunas concepciones que se tienen acerca de la práctica docente, es importante señalar ahora los beneficios que genera este ejercicio al maestro en formación. Así pues, la práctica docente dentro de sus múltiples posibilidades, permite al estudiante-practicante conocer y aprender a planificar temáticas basadas en unos lineamientos curriculares, bajo una adecuada metodología sin importar la corriente pedagógica, sino más bien los resultados que se puedan obtener de dicha corriente. Dentro del ejercicio de la práctica docente es necesario seleccionar minuciosamente criterios de evaluación bien fundamentados que acompañados de una didáctica fomenten y estimulen la participación de la construcción del conocimiento matemático.

Además en la práctica docente, el licenciado en formación puede encontrar las herramientas necesarias para despertar en los neófitos el interés en el aprendizaje de las matemáticas, pero no por medio de la presión que el practicante pueda ejercer sobre el estudiante, sino más bien por instinto propio del niño, de esta forma el conocimiento adquirido por los niños en el proceso de formación, no debe ser para sorprender a sus padres, ni mucho menos al docente, ni al practicante de matemáticas, sino por sentirse bien con él mismo, puesto que, si el niño se siente a gusto con el conocimiento matemático construye conscientemente sus propios conceptos, se apropia del saber y logra ver la utilidad del mismo en su cotidianidad.

De modo que, la práctica docente sería pues un espacio donde los futuros licenciados de matemáticas experimentan un conflicto entre la teoría adquirida en la Universidad durante su formación y la aplicación de esa teoría en la Escuela, esto obliga a que si el practicante desea construir una diferencia en el contexto escolar, asuma una posición frente al conocimiento matemático y pedagógico y construya su metodología de acuerdo al contexto, de lo contrario será un transmisor de conocimiento y un formador de autómatas.

La metodología y la transposición didáctica del conocimiento que realiza el practicante en el ejercicio de la docencia es única, puesto que no todos los docentes de matemáticas utilizan las mismas metodologías, las mismas acciones (teniendo en cuenta que las acciones tienen dos implicaciones a) la intención con que construimos la acción. b) el efecto que causa la acción), las mismas corrientes pedagógicas, la misma didáctica y las mismas formas de concienciar a los estudiantes para que aprendan las matemáticas por interés y no por obligación.

Es gracias a la práctica docente que el estudiante-practicante, se puede autoevaluar y cuestionar sobre ¿Cómo está enseñando matemáticas?, ¿Qué se debe enseñar de las matemáticas? ¿Para qué sirve lo que está enseñando de las matemáticas? ¿La enseñanza impartida está contribuyendo a la formación se seres íntegros? ¿Qué hacer para captar la atención de los estudiantes en las clases de matemáticas? ¿Cómo actuar frente a los imprevistos que se presentan en el aula de clase como conflicto entre estudiantes, resolución de problemas, etc.?

De ahí que, la práctica docente deba ser asumida como un espacio para la reflexión (Peralta, s.f) y no simplemente como la acción, puesto que es a través del ejercicio constante del análisis de lo ejecutado que se logra identificar la diferencia existente entre los logros y las proyecciones.

No hay que olvidar que la práctica docente, también puede convertirse en un foco de investigación con todas las situaciones particulares que se presentan en el aula, al compartir no solo la realidad sino también todas las particularidades de las situaciones académicas (Peralta, s.f)

Finalmente, la práctica docente en la Universidad del Tolima tiene un enfoque integral, de investigación, direccionado a que los estudiantes vivencien la escuela y reflexionen sobre la experiencia, según lo planteado en el Acuerdo 791 de 2012, sin embargo es necesario realizar un proceso de difusión fuerte para que no sigan existiendo vacíos sobre la relevancia de la práctica docente en los licenciados en formación, pues no se puede contribuir a incrementar una de las grandes contradicciones del sistema educativo en palabras de Moreno (Moreno, 2011) que el discurso esté desligado de la realidad escolar.

Referencias

Abarca, A. (s.f). La práctica docente en la formación. Recuperado de: http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/32105/Documento_completo.pdf?sequence=1

Achilli, E. (1986). *La práctica docente: una interpretación desde los saberes del maestro*, Cuadernos de Formación Docente, Universidad Nacional de Rosario. Recuperado de: https://www.academia.edu/3673500/137092734-Achilli-Practica-Docente

Bosch, M. & Gascón, J. (2001). De las prácticas docentes a la organización didáctica escolar. Barcelona. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/almeria/Practicas_docentes.PDF

Moreno, T. (2011) Frankenstein evaluador. Revista *de la Educación Superior*. Vol. 40 (160); pp-119-131

Peralta, M. (s.f) La práctica docente y la investigación educativa: dos oficios diferentes pero complementarios en el saber profesional. Recuperado de: http://renpyr.xtrweb.com/jornadas/(D)%20III_Jornadas/eje_2/peralta,_ma._eugenia._trabajo.pdf

Restrepo, B. (1982) La evolución de las Facultades de Educación. Ponencia presentada en el Seminario: Congreso de Facultades de Educación. Cali. Recuperado de: http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/5712/5132

Revilla, D. (2010), *La práctica reflexiva durante el desarrollo de la práctica pre – profesional docente* Ponencia presentada en Congreso Iberoamericano de Educación, Buenos Aires Argentina. Recuperado de http://www.chubut.edu.ar/descargas/secundaria/congreso/DOCENTES/RLE2144_Revilla.pdf

Sacristán, G. (1998) *Profesionalización docente y cambio educativo*. Ponencia presentada en el Seminario: “Formación Docente y calidad de la educación”. Universidad de Valencia. Abril de 1988. En ALLIAUD, A. y DUSCHATZKY, L. (comps.) *Formación, práctica y transformación escolar.* IICE. Miño y Dávila. Buenos Aires. Pág. 131 – 135.

Salgueiro, A. (s.f). La práctica docente cotidiana de una maestra y el proceso de apropiación y construcción de su saber: un estudio etnográfico. Recuperado de http://www.quadernsdigitals.net/datos_web/hemeroteca/r_12/nr_191/a_2691/2691.html

Sistema numérico, otra manera de crearlo y contarlo

Σιστεμα νυμ⌈, ριχο εν λα χυλτυρα Οϖιμεριανα

Diego Ricardo Rojas Cuéllar [1]
Ovímer Gutiérrez Jiménez [2]

Desde otro punto de vista, queremos recorrer el proceso para construir un sistema numérico para contar. Esperando que la comprensión de este proceso sirva de modelo para construir otros sistemas de numeración.

Érase una vez, una cultura que se hacía llamar *Chicheriana*, por aquello de la bebida más sagrada para ellos. Esta comunidad se estableció a orillas del rio Magdalena desde 30 A.C., aproximadamente. Los hombres de esta cultura en un principio realizaron correspondencia biunívoca de elementos y/u objetos para intercambiar, contar y así tener conocimiento o una idea de la cantidad que poseían de objetos o elementos. En esta cultura existían pequeños grupos de personas que registraban su conteo haciendo huecos pequeños en los tallos de los árboles, otros clasificando piedras pequeñas de igual número de elementos que poseían y otros hacían marcas en tablas de piedras representando todo aquello que contaban, por lo cual se evidencia la necesidad de tener un sistema numérico práctico, a la medida que las cantidades crecen o se hacen más grandes.

Los sabios de la cultura veían la necesidad de instituir símbolos y reglas para contar y representar los objetos, donde llegaron a acuerdos, en consecuencia, establecieron que para cada unidad de un conjunto le asociarían el símbolo ♪ haciendo una correspondencia biunívoca.

De esta manera 15 objetos o elementos de un conjunto se pueden representar por:

♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪: 15

Y así sucesivamente con cualquier cantidad de elementos y/u objetos.

En este proceso, encontraron inconvenientes, puesto que para representar o contar muchos elementos, se les dificultó en realizar su respectiva lectura, además que les resultó muy dispendioso realizar la escritura del mismo.

Para resolver este inconveniente, decidieron incorporar un nuevo símbolo (♫), que representara a un grupo de símbolos tomados como unidad.

Por ejemplo, notemos por ♫ cada grupo de seis ♪.
De esta manera cada ♫ equivale a ♪♪♪♪♪♪

Es decir, ♫ = ♪♪♪♪♪♪, por lo tanto 6 símbolos de ♪ son un símbolo de ♫,

Entonces, 36: ♫♫♫♫♫♫

---

[1] Licenciado en Matemáticas. Estudiante de Maestría en Educación, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima, Colombia; e-mail: drrojasc@ut.edu.co
[2] Licenciado en Matemáticas. Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, Colombia; e-mail: ogutierrezji@ut.edu.co

(♪♪♪♪♪♪) (♪♪♪♪♪♪) (♪♪♪♪♪♪) (♪♪♪♪♪♪) (♪♪♪♪♪♪) (♪♪♪♪♪♪)

♫ ♫ ♫ ♫ ♫ ♫

Asumieron que van a encontrar con el mismo inconveniente de la lectura decidieron incorporar dos nuevos símbolos (♣ y ♥) que representaría:

El símbolo ♣ representaría cinco ♫, lo que equivaldría a ♣ = ♫♫♫♫♫ = ♪♪♪♪♪♪ ♪♪♪♪♪♪ ♪♪♪♪♪♪ ♪♪♪♪♪♪ ♪♪♪♪♪♪ lo que sería para nuestro sistema a 30, así 36: ♣♫

Y el símbolo ♥ representaría cuatro ♣, lo que equivaldría a ♥ = ♣♣♣♣ = ♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫, lo que sería para nuestro sistema a 120 unidades, así 144 : ♥♫♫♫♫

Entonces se podría escribir:

56♣♫♫♫♫♪♪ = ♣♫♫♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪ = ♫♫♫♫♫♫♫♫♫♪♪ = ♪♫♫♫♫♫♫♫♫♫♪, etc.

Sin embargo, se dieron cuenta que existía cualquier cantidad de maneras posibles de representar o escribir un número.

De allí, plantearon dar reglas que se deben tener en cuenta para que un número tenga una y solo una, única forma de representarlo.

En consecuencia, determinaron adoptar las siguientes reglas:

♪. Escribir y leer los números de izquierda a derecha.
♪♪.Escribir primero los ♥, luego los ♣ , luego los ♫, luego los ♪
♪♪♪.Escribir la representación con la mínima cantidad de símbolos posibles simplificando al máximo la cantidad de símbolos.
♪♪♪♪. El símbolo ♥ se puede repetir cuantas veces sea necesario.

De esta manera,
56♣♫♫♫♫♪♪, el cual es su única representación.

Para lo cual se deduce que el sistema numérico de la cultura *Chicheriana*, es un sistema de numeración No posicional y aditivo. Consta de cuatro símbolos fundamentales ♪, ♫ , ♣ , ♥.

Operaciones básicas

♪. **Operación Suma (+) :** para esta operación los sabios *Chicherianos* resaltaron que como el sistema es aditivo, es suficiente con colocar la representación de un número seguido de la del otro y simplificar aplicando las reglas.

Consideremos los números ♣♣♣♫♫♪♪♪ y ♥♥♣♣♫♫♫♪♪♪♪♪ y realicemos la suma entre ellos, entonces:

♣♣♣♫♫♪♪♪ + ♥♥♣♣♫♫♫♪♪♪♪♪ = ♣♣♣♫♫♪♪♪♥♥♣♣♫♫♫♪♪♪♪♪
= ♥♥♣♣♣♣♣♫♫♫♫♫♪♪♪♪♪♪♪♪
= ♥♥♥♣♣♫♪♪

♪♪. **Operación Resta (-) :** los *Chicherianos* para restar dos números, X - Y , siendo X mayor que Y, ellos definieron descomponer el primer número X en tantos números como fuese necesario, para que en la representación de X se encuentren símbolos o números iguales de Y, y de esta manera ir eliminando número por número que fuese igual hasta eliminar en su totalidad los símbolos o números que componen el número Y, los símbolos o números que quedan es la diferencia o resta de estos dos números (X – Y).

Ejemplo: Consideremos los números ♥♥♣♣♫♫♫♪♪♪♪ y ♣♣♣♫♫♪♪, realicemos la resta entre ellos, siendo ♥♥♣♣♫♫♫♪♪♪♪=X y ♣♣♣♫♫♪♪=Y entonces la resta queda definida por X – Y donde X es el primer número:

♥♥♣♣♫♫♫♪♪♪♪ - ♣♣♣♫♫♪♪ =
= ♥♣♣♣♣♣♣♫♫♫♪♪♪♪- ♣♣♣♫♫♪♪♪
= ♥♣♣♪♪

Entonces, ♥♥♣♣♫♫♫♪♪♪♪ - ♣♣♣♫♫♪♪ = ♥♣♣♪♪

♪♪♪. **Operación Multiplicación (por y posteriormente se utilizó el símbolo *):** los *Chicherianos*, retomaron el concepto de multiplicación (multiplicación como una suma abreviada), entonces para multiplicar un número X por un número Y es equivalente a sumar X veces el número Y.

En un principio, realizaron el siguiente procedimiento para multiplicar dos números, como por ejemplo:

Multiplicar ♫♪♪ por ♥♣♫♪♪, entonces aplicando el concepto de multiplicación, equivale a sumar ♫♪♪ veces el número ♥♣♫♪♪, de la siguiente forma, se coloca ♫♪♪ veces el número ♥♣♫♪♪ de tal manera que queden seguidos para proceder a simplificar la expresión aplicando las reglas de representación única de los números.

♥♣♫♪♪ ♥♣♫♪♪ ♥♣♫♪♪ ♥♣♫♪♪ ♥♣♫♪♪ ♥♣♫♪♪ ♥♣♫♪♪ ♥♣♫♪♪
= ♥♥♥♥♥♥♥♥♣♣♣♣♣♣♣♣♫♫♫♫♫♫♫♫♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪
= ♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♣♫♫♫♫♫♪♪♪♪
=♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♣♣♪♪♪♪

Después de realizar el procedimiento anterior en repetidas ocasiones y con diferentes números, encontraron características al realizar la multiplicación que podrían simplificar más el proceso; para ello, observemos algunos detalles:

> ♪) los *Chicherianos*, inicialmente multiplicaron entre sí los símbolos básicos y encontraron que al sumar ♪ vez los símbolos o números ♪, ♫ , ♣ , ♥, su resultado es el mismo número, y continuaron realizando dichas multiplicaciones para lo cual incorporaron el símbolo * para representar la multiplicación; de tal forma X*Y significa sumar X veces el numero Y. Por lo tanto:

♪*♪=♪
♪*♫=♫
♪*♣=♣
♪*♥=♥

♫*♪ = ♪♪♪♪♪♪ = ♫
♫*♫ = ♫♫♫♫♫♫ = ♣♫
♫*♣ = ♣♣♣♣♣♣ = ♥♣♣
♫*♥ = ♥♥♥♥♥♥

♣*♪ = ♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪ = ♫♫♫♫♫ = ♣
♣*♫=♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫
= ♣♣♣♣♣♣ = ♥♣♣
♣*♣ = ♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣
= ♥♥♥♥♥♥♥♣♣
♣*♥= ♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

♥*♪ = ♪♪♪
♪♪
♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪ = ♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫
♫♫♫♫ = ♣♣♣♣ = ♥

♥*♫= ♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫
♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫
♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫
♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫ = ♣♣♣♣
♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣ = ♥♥♥♥♥♥

♥*♣ = ♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣
♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣
♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣
♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣
= ♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

♥*♥= ♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥
♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥
♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥
♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

De esta manera establecieron una tabla de multiplicación con cada uno de los elementos básicos que comprenden su sistema numérico, como se evidencia en la siguiente tabla:

*	♪	♫	♣	♥
♪	♪	♫	♣	♥
♫	♫	♣♫	♥♣♣	♥♥♥♥♥♥
♣	♣	♥♣♣	♥♥♥♥♥♥♥♣♣	♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥ ♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥
♥	♥	♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥ ♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥ ♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥ ♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥ ♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

♪♪) En el momento que realizaron una multiplicación, donde uno de sus factores está comprendido por dos o más símbolos, dedujeron que por conveniencia y claridad en dicha operación (multiplicación), es necesario incorporar paréntesis para diferenciar el número factor que está representado con dos o más símbolos con el otro número que están separados por símbolo operación (*); observemos uno de los casos, consideremos la siguiente multiplicación ♫ por ♣♫, entonces, lo que deseamos es sumar ♫ veces el número ♣♫

♫* ♣♫ = ♣♫♣♫♣♫♣♫♣♫♣♫
= ♣♣♣♣♣♣♫♫♫♫♫♫
= ♥♣♣♣♫
= ♫* (♣♫)

♣♫*♫ = ♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫
♫♫♫♫♫♫♫ = ♣♣♣♣♣♣♣♫ = ♥♣♣♣♫
= (♣♫)*♫

Dado el caso en que los paréntesis no se ubiquen en el lugar indicado, es decir, que no encierren el número y operación indicada, puede ocurrir que el resultado de dicha operación no sea igual, observemos:

Al multiplicar ♫* ♣♫ y al colocar los paréntesis de las siguientes formas encontramos,
(♫* ♣) ♫ = ♥♣♣♫
♫*(♣ ♫) = ♥♣♣♣♫

Lo cual es evidente que (♫* ♣) ♫ ≠ ♫*(♣ ♫), por consiguiente, los *Chicherianos* resaltan la importancia de usar los paréntesis en el lugar adecuado por la constitución de su sistema numérico aditivo.

♪♪♪) las propiedades que establecieron los *Chicherianos* en su sistema numérico en relación con la operación multiplicación son:

♪. **Modulativa:** El ♪ es el módulo del producto.

♪*♪=♪ ♣*♪=♣
♫*♪=♫ ♥*♪=♥

♪♪. **Asociativa:** X*(Y*Z) = (X*Y)*Z. Esto se puede apreciar desarrollando los dos lados de la igualdad y verificar que tienen la misma representación, para lo cual debe observar que X*(Y*Z) equivale a sumar X veces Y*Z, y que (X*Y)*Z equivale a sumar X*Y veces Z.

♪♪♪. **Distributiva:** X*(YZ) = (X*Y)(X*Z) . La demostración se basa en el hecho de que al repetir X veces el número Y, se repite X veces cada símbolo que compone a Y y como la notación es aditiva, estamos sumando los símbolos de Y cada uno de ellos X veces, es decir cada uno de ellos multiplicado por X.

♪♪♪♪. **Conmutativa:** Observe de la tabla de multiplicación, que los productos de los símbolos básicos son conmutativos. Al aplicar la distributividad completa a X∗Y solo quedan productos de símbolos básicos, los cuales se pueden conmutar, obteniendo así, al agruparlos adecuadamente, Y∗X.

♪♪♪) los *Chicherianos* hacen uso de las propiedades que poseen su sistema de numeración y establecen un algoritmo que facilita el proceso de realizar la operación multiplicación.

(♫♪) * (♣♫♫) = (♫*(♣♫♫)) (♪*(♣♫♫)) propiedad distributiva
= (♣♫♫)(♣♫♫)(♣♫♫)(♣♫♫)(♣♫♫)(♣♫♫)(♣♫♫) propiedad modulativa.
= ♣♣♣♣♣♣♣♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫♫ propiedad conmutativa en +
= ♥♣♣♣♣♣♫♫♫♫
= ♥♥♣♫♫♫♫

Otra forma, se procede con el siguiente esquema, en la primera parte se escribe los números a multiplicar, en la segunda parte se realiza las respectivas multiplicaciones símbolo a símbolo colocando sus resultados separados por una línea horizontal y en la tercera y última parte se coloca el resultado final ya simplificado con el mínimo de símbolos posibles.

$$\left\langle x * y \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{X veces Y,}\\ \text{símbolo a símbolo}\\ \text{separado por}\\ \text{líneas horizontales}\end{array} \;\middle|\; \text{resultado} \right\rangle$$

Ejemplo: multiplicar, (♫♪) *(♣♫♫)

♫♪ * ♣♫♫	♣♫♫	♥♥♣♫♫♫♫	
	♫♫♫♫♫♫		
	♫♫♫♫♫♫		
	♣♣♣♣♣♣		

♪♪♪♪. **Operación División (÷):**

Para esta operación, los *Chicherianos* instauraron un grupo de símbolos o números que puedan repartir una cantidad X a lo que llamaron cociente, de tal forma que cada grupo contenga Y elementos a lo que definieron como divisor, en ese proceso hay símbolos que sobran a los que llamaron residuo, de esta manera precisaron la operación división X ÷ Y. El proceso para desarrollar esta operación evolucionó de la siguiente manera:

♪) Escribir los números X y Y, solo con ♪ separar las ♪ de X en grupos con igual número de ♪ que las que figuran en Y. El número de grupos que resultan es el cociente y el número de ♪ que sobran por no alcanzar a formar un grupo es el residuo.

Ejemplo: ♣♫♫♪÷♫♪♪, representamos los dos números en términos de ♪
♣♫♫♪ : ♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪ ♪♪♪♪♪♪ ♪♪♪♪♪♪ ♪
♫♪♪ : ♪♪♪♪♪♪♪♪

Ahora, se forman grupos de igual número de símbolos el dividendo con respecto al divisor,
♣♫♫♪: ♪♪♪♪♪♪♪♪ ♪♪♪♪♪♪♪♪ ♪♪♪♪♪♪♪♪ ♪♪♪♪♪♪♪♪ ♪♪♪♪♪♪♪♪ ♪♪♪

Entonces, se deduce que ♣♫♫♪ hay ♪♪♪♪♪ grupos y sobran ♪♪♪. Por lo tanto el cociente es ♪♪♪♪♪ y el residuo ♪♪♪, por lo que tenemos que ♣♫♫♪÷♫♪♪ = ♪♪♪♪♪ con residuo ♪♪♪, en representación de la operación división tenemos:

♣♫♫♪	♫♪♪
♪♪♪	♪♪♪♪♪

Al desarrollar el proceso anterior de la operación división se vislumbra que es muy dispendioso cuando el dividendo es un número muy grande.

♪♪) analizando el proceso anterior, acordaron organizar el dividendo y el divisor de tal forma que en el dividendo aparezca el mayor número de bloques con los mismos símbolos del divisor. El número de bloques así obtenido es el cociente y los que sobren por no formar un bloque completo es el residuo.

♥♣♣♣ ÷ ♣♣♫♪
♥♣♣♣ = ♣♣♣♣♣♣♫♫♫♫♪♪♪♪♪
= (♣♣♫♪) (♣♣♫♪) (♣♣♫♪) (♫♪♪♪)

De donde el cociente es ♪♪♪ y el residuo ♫♪♪♪

♥♣♣♣	♣♣♫♪
♫♪♪♪	♪♪♪

♪♪♪) en consecuencia los *Chicherianos* construyeron un algoritmo de la operación división observemos paso a paso con un ejemplo:

Dividir ♥♥♣♣♣♫ entre ♣♫♪♪

♪paso- se toma de izquierda a derecha en el dividendo un primer bloque de números que contengan el mismo número de elementos que el divisor, en este caso ♥♥ así

♥♥♣♣♣♫ = (♥♥) (♣♣♣♫)

♪♪paso- se establece cuantas veces cabe el ♣♫♪♪ en el primer bloque (♥♥) como,
♥♥ = ♣♣♣♣♣♫♫♫♫♫♫♫♫♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪♪
= (♣♫♪♪)(♣♫♪♪)(♣♫♪♪)(♣♫♪♪)(♣♫♪♪) (♫♫♫♪♪)

Se observa que ♣♫♪♪ cabe ♪♪♪♪♪ en ♥♥ y restan ♫♫♫♪♪

♪♪♪paso- Coloque ese ♪♪♪♪♪como parte del cociente, y en el dividendo cambie el ♥♥ por el residuo ♫♫♫♪♪, y ordene el número resultante.
♫♫♫♪♪ ♣♣♣♫ = ♣♣♣♫♫♫♫♪♪

♪♪♪♪paso- Repita el proceso de los pasos ♪- ♪♪ - ♪♪♪

♣♣♣♫♫♫♫♪♪ = (♣♣♣) (♫♫♫♫♪♪)

♣♣♣ = ♣♣♫♫♫♫♪♪♪♪♪♪ = (♣♫♪♪) (♣♫♪♪) (♫♫♪♪)

Como ♣♫♪♪ cabe ♪♪ veces en ♣♣♣, pase el ♪♪ al cociente, que sumado con el ♪♪♪♪♪ que había, quedan ♪♪♪♪♪♪♪ = ♫♪ en el cociente y queda ♫♫♪♪ en el residuo.

Entonces, ♫♫♪♪ ♫♫♫♫♪♪ = ♫♫♫♫♫♫♪♪♪♪ = ♣♫♪♪♪♪
♣♫♪♪♪♪ = (♣♫♪♪) (♪♪)

Como ♣♫♪♪ cabe ♪ veces en ♣♫♪♪♪♪, pase el ♪ al cociente, que sumado con el ♫♪ que había, quedan ♫♪♪ en el cociente y queda ♪♪ en el residuo.

♪♪♪♪♪ paso- Al reemplazar el ♣♫♪♪ por el ♪ del residuo queda ♪♪♪. Como ♣♫♪♪ no cabe en ♪♪♪, el residuo es este ♪♪♪.

♫ paso- Por tanto ♥♥♣♣♣♫÷♣♫♪♪ da cociente ♫♪♪ y residuo ♪♪♪

Potenciación

La potenciación es la operación que definieron los *Chicherianos*, como la representación de la multiplicación de factores iguales. Si **X** y **n** son número del sistema *Chicheriano* se define:

$$\mathbf{X^n = \underbrace{X*X*X*X*X*X*\ldots*X}_{n\ veces}}$$

Donde **X** es tomado como el factor **n veces.** Los términos que intervienen en la potenciación son: la base, el exponente y la potencia**.** La base, es el factor que se repite. El exponente, indica las veces que se repite la base**.** La potencia, es el resultado de la operación.

Así, $(♣♫)^{♪♪♪}$ quiere decir multiplicar el número ♣♫ por sí mismo ♪♪♪ veces:

= (♣♫) * (♣♫) * (♣♫)
= ((♣♫) * (♣♫)) * (♣♫)
= { ((♣♫) *♣)((♣♫)*♫)} * (♣♫)
= { ((♣*♣) (♫*♣))((♣*♫) (♫*♫))} * (♣♫)
= { ((♥♥♥♥♥♥♥♣♣) (♥♣♣))((♥♣♣) (♣♫))} * (♣♫)
= (♥♥♥♥♥♥♥♥♥♣♣♣♣♣♣♣♣♫) * (♣♫)
= (♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♣♣♣♫) * (♣♫)
= { ((♥*♣)(♥*♣)(♥*♣)(♥*♣)(♥*♣)(♥*♣)(♥*♣)(♥*♣)(♥*♣)
(♥*♣)) ((♣*♣)(♣*♣)(♣*♣)) (♫*♣) } {((♥*♫)(♥*♫)(♥*♫)
(♥*♫)(♥*♫)(♥*♫)(♥*♫)(♥*♫)(♥*♫)(♥*♫))((♣*♫)(♣*♫)
(♣*♫)) (♫*♫) }
= { ((♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥)
(♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥)
(♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥)
(♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥)
(♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥)
(♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥)
(♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥)
(♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥)
(♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥)
(♥))
((♥♥♥♥♥♥♥♣♣)(♥♥♥♥♥♥♥♣♣)(♥♥♥♥♥♥♥♣♣))(♥♣♣) } {(((♥♥♥♥♥♥♥)
(♥♥♥♥♥♥♥)(♥♥♥♥♥♥♥)(♥♥♥♥♥♥♥)(♥♥♥♥♥♥♥)(♥♥♥♥♥♥♥)(♥♥♥♥♥♥♥)
(♥♥♥♥♥♥♥)(♥♥♥♥♥♥♥)(♥♥♥♥♥♥♥))((♥♣♣) (♥♣♣)(♥♣♣)) (♣♫) }

Notación multiplicativa

Los *Chicherianos* observaron en el ejemplo anterior lo engorroso que resulta manejar un número con un símbolo repetido muchas veces. En este caso en el resultado la ♥ aparece ♥♥♥♣♣♫♫♫♫ veces (448 veces), para lo cual establecieron una forma de representación de dicha cifra en colocar el número de veces que se repite un símbolo o número como subíndice derecho, en el caso anterior, se tendría :

$$♥_{(♥♥♥♣♣♫♫♫♫♪)}$$

Para que de esta manera,

(♣♫)$^{♪♪♪}$= ♥(♥♥♥♣♣♫♫♫♫♪♪♪♪) ♣(♪♪♪)♫

En consecuencia, se establecieron tres propiedades de la potenciación para cualquier número X,n,m que pertenezcan al sistema de numeración *Chicherianos*,

♪) $X_{mn} = X_m X_n$
♪♪) $n*X_m = (X)_{m*n}$
♪♪♪)$X_m X_n = X_{(Xm)*n)}$

Notación Exponencial

Para representar números grandes los *Chicherianos* consideraron que ellos tienen una presentación muy engorrosa, pues en ella aparece muchas veces repetida el símbolo o número ♥, como con la notación multiplicativa se puede obviar esa situación. Especificaron que si se toma el símbolo ♥ como una base, los números grandes se pueden escribir en forma más simplificada usando potencias de ♥:

♥$^{♪}$= ♥
♥$^{♪♪}$= ♥*♥ = ♥… ♥ (120 veces ♥) (14.400 en nuestra notación)
♥$^{♪♪♪}$=(♥*♥)*♥=(♥ veces)(♥*♥)= ♥… ♥ (14.400 veces ♥)
(1.728.000 en nuestra notación)
♥$^{♪♪♪♪}$=(♥*♥*♥*♥)=(♥ veces)(♥*♥*♥)= ♥… ♥
(1.728.000 veces ♥) (207.360.000 en nuestra notación)
♥$^{♪♪♪♪♪}$=(♥*♥*♥*♥*♥)=(♥ veces)(♥*♥*♥*♥)= ♥… ♥
(207.360.000 veces ♥) (24.883.200.000 en nuestra notación)
♥$^{♫}$=(♥*♥*♥*♥*♥*♥)=(♥ veces)(♥*♥*♥*♥*♥)= ♥… ♥
(24.883.200.000 veces ♥) (2.985.984.000.000 en nuestra notación)

De esta manera y sucesivamente se puede encontrar cualquier potencia que se desee repitiendo el proceso tantas veces como se quiera; además que expresar un número en potencia es muy útil para representar un número tan grande como se quiera o considere.

Notación Posicional

En el siglo ♫♪ D.C. los *Chicherianos* hicieron aportes significativos a su sistema de numeración con el fin de mejorar sus prácticas; para ellos les tomó varios siglos de pasar de un sistema de numeración no posicional o un sistema de numeración posicional.

Para lo que tomaron el símbolo o número ♫ y observaron sus potencias.

♫$^{♪}$= ♪♪♪♪♪♪
♫$^{♪♪}$=♫♫♫♫♫♫
♫$^{♪♪♪}$=♫*(♫$^{♪♪}$)=♫$^{♪♪}$♫$^{♪♪}$♫$^{♪♪}$♫$^{♪♪}$♫$^{♪♪}$♫$^{♪♪}$
♫$^{♪♪♪♪}$=♫*(♫$^{♪♪♪}$)=♫$^{♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪}$
♫$^{♪♪♪♪♪}$=♫*(♫$^{♪♪♪♪}$)=♫$^{♪♪♪♪}$♫$^{♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪}$
♫$^{♫}$=♫*(♫$^{♪♪♪♪♪}$)=♫$^{♪♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪♪}$
♫$^{♫♪}$=♫*(♫$^{♫}$)=♫$^{♫}$ ♫$^{♫}$ ♫$^{♫}$ ♫$^{♫}$ ♫$^{♫}$ ♫$^{♫}$

⋮ = ⋮ = ⋮

Ahora los números los escribieron solamente con los símbolos ♫ y ♪, teniendo en cuenta que cuando aparezcan: ♪♪♪♪♪♪ se reemplaza por ♫, o sea:

♪♪♪♪♪♪ Se reemplaza por ♫$^{♪}$
♫$^{♪}$ ♫$^{♪}$ ♫$^{♪}$ ♫$^{♪}$ ♫$^{♪}$ ♫$^{♪}$ Se reemplaza por ♫$^{♪♪}$
♫$^{♪♪}$ ♫$^{♪♪}$ ♫$^{♪♪}$ ♫$^{♪♪}$ ♫$^{♪♪}$ ♫$^{♪♪}$ Se reemplaza por ♫$^{♪♪♪}$
♫$^{♪♪♪}$♫$^{♪♪♪}$♫$^{♪♪♪}$♫$^{♪♪♪}$♫$^{♪♪♪}$♫$^{♪♪♪}$ Se reemplaza por ♫$^{♪♪♪♪}$
♫$^{♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪}$ Se reemplaza por ♫$^{♪♪♪♪♪}$
♫$^{♪♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪♪}$ ♫$^{♪♪♪♪♪}$ Se reemplaza por ♫$^{♫}$

Así sucesivamente, colocaron estas potencias en el número, en orden de potencias de mayor a menor, de izquierda a derecha.

Entonces, los Chicherianos de la época establecieron, como las potencias de ♫ aparecen ordenadas de izquierda a derecha, de mayor a menor y cada una de ellas puede aparecer a lo más ♪♪♪♪♪ veces, podríamos optar por no colocar las potencias, sino, de derecha a izquierda ir colocando las veces que aparecen en su orden el ♪, la ♫$^{♪}$, la ♫$^{♪♪}$, la ♫$^{♪♪♪}$, la ♫$^{♪♪♪♪}$, la ♫$^{♪♪♪♪♪}$, la ♫$^{♫}$, etc., asumiendo que recordamos la posición de las potencias de ♫ .

Además, cuando no haya o no exista la(s) potencia(s) menor(es) a la que le sigue (es porque la que le sigue existe) para no dejar espacios, acordaron que cuando esto ocurra utilizarán un nuevo símbolo que reemplace la potencia o las potencias que hagan falta para completar o representar un determinado número; a ese nuevo símbolo lo llamaron cero y se denota por ◊, este nuevo símbolo representará un solo espacio o no existencia de una potencia, si el símbolo aparece dos veces seguidas representará dos espacios y así sucesivamente.

Como por ejemplo,

i) ♪♪♪♪♪ ♪♪
ii) ♪ ♪♪♪ ◊ ♪♪
iii) ♪♪♪♪ ◊ ◊ ♪

Sin embargo, por comodidad y conveniencia para representar repeticiones de cada potencia, se establecieron asignar símbolos para cuando la potencia se repite 1 vez, otro cuando se repite 2 veces, otro cuando se repite 3 veces, otro cuando se repite 4 veces, otro cuando se repite 5 veces.

Entonces se deriva lo siguiente,

1 indica que la potencia de ♫ que ocupa ese lugar aparece 1 vez
2 indica que la potencia de ♫ que ocupa ese lugar aparece 2 veces
3 indica que la potencia de ♫ que ocupa ese lugar aparece 3 veces
4 indica que la potencia de ♫ que ocupa ese lugar aparece 4 veces
5 indica que la potencia de ♫ que ocupa ese lugar aparece 5 veces

De esta manera quedaría la nueva notación de los números:

iv) ♪♪♪♪♪ ♪♪≡52
v) ♪ ♪♪♪ ◊ ♪♪ ≡13◊2
iv) ♪♪♪♪ ◊ ◊ ♪≡4◊◊1

Para lo que se tiene, que el número 13◊2 representado en potencias del sistema *Chicherianos,* se tendría:

13◊2= ♫♪♪♪ ♫♪♪ ♫♪♪ ♫♪♪ ♪♪

Concluyendo que este nuevo sistema de numeración *Chicherianos* es un sistema de representación Posicional.

Referencias

Broyer, C. B. (1999). *Historia de la Matemática*. Barcelona: Alianza Editorial.

Luque A., C. J., Mora M., L. C. y Pérez J. E. (2013). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar-inducir.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

La monitoría de investigación: una oportunidad de aprendizaje profesional

Yeimi Paola Herrera Naranjo[1]
Karen Estefany Osorio Guerrero[2]

Introducción

En la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional existe la posibilidad de acceder a actividades académicas que, si bien no son parte del plan de estudios regular, sí aportan a la formación profesional. Una de tales actividades son las monitorías de investigación, contempladas normativamente como "un espacio de formación centrado en la interacción del monitor con docentes que adelantan actividades de investigación" (UPN, 2004).

Atendiendo a lo anterior, durante los semestres 2013-2 y 2014-1, nos desempeñamos como monitoras del proyecto de investigación titulado "El conocimiento histórico en la constitución de una visión sobre la naturaleza de la Aritmética y el Álgebra en maestros de Matemáticas en formación", desarrollado por el equipo de investigación *Research on Matemathics Teacher Education* (RE-MATE) del Departamento de Matemáticas y financiado por el Centro de Investigaciones de la Universidad.

El presente escrito surge como una manera de explicitar lo realizado y aprendido en tal monitoría. En ese sentido se organiza en tres partes: en la primera se expone el por qué llegamos a ser monitoras de investigación; en la segunda, se mencionan las actividades realizadas, mostrando aspectos de aquello que se aprendió de ellas y algunos sentimientos experimentados; en la tercera parte se resumen las conclusiones en las que se expone también el para qué de la monitoria y el sentido de la misma.

¿Por qué se llega a ser monitoras de investigación?

Si bien las monitorías de investigación están definidas normativamente y existen criterios claros para acceder a las mismas (UPN, 2004), hemos sabido que nuestro buen desempeño como estudiantes de uno de los cursos de la Licenciatura fue el acicate para que la profesora Lyda Mora, coinvestigadora del proyecto citado, nos invitara a participar de la convocatoria a las monitorías. Suponemos que la docente advirtió nuestro legítimo interés por aprender y adquirir el mayor conocimiento posible en el transcurso de nuestra vida universitaria y ello le dio la confianza para hacernos partícipes de la convocatoria.

¿Qué papel desempeñamos como monitoras de investigación del proyecto?

Nuestro papel en la monitoría se desarrolló en ámbitos de tipo académico y de gestión, así como en actividades ligadas al proyecto de investigación y al grupo de investigación. En efecto, tuvimos la posibilidad de compartir espacios de estudio y discusión académica, también realizamos trámites administrativos; consideramos que ambos contribuyeron a nuestra formación como profesoras.

A continuación, listamos algunas de las tareas realizadas, mencionando brevemente la experiencia adquirida con cada una y algunos sentimientos provocados.

Asistencia a las sesiones de reunión del grupo. Semanalmente el grupo completo[3] se reunió para discutir diferentes aspectos relacionados con el estudio de algún tema en el cual se debía ahondar en la investigación. En las primeras reuniones experimentamos cierto grado de nerviosismo y timidez debido a lo novedoso de la condición y la temática misma; adicionalmente se despertó un sentimiento de admiración al escuchar a los investigadores discutir académicamente con tanta propiedad. Este sentimiento se fue transformando en una meta que generó un horizonte de sentido a nuestra participación en las reuniones, pues si bien nuestro papel en estas sesiones fundamentalmente fue escuchar y tomar apuntes, en varias oportunidades tuvimos la oportunidad de mencionar nuestras opiniones y puntos de vista.

1. Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; e-mail: dma_kosorio035@pedagogica.edu.co
2. Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; e-mail: dma_yherrera890@pedagogica.edu.co

3. El coordinador del proyecto, tres profesores del departamento, un asistente y las dos monitoras.

Fragmentación y subtitulación de videos. Una tarea que se realizó durante el primer periodo de la monitoría fue, además de grabar las sesiones de clase del espacio académico objeto de estudio, identificar y subtitular los fragmentos de los videos en los que se hacía referencia a la Historia de las Matemáticas. Sin duda esta tarea nos permitió valorar los trabajos investigativos realizados, aprender a transcribir lo que sucede en una clase, promover el uso de software de edición de videos y ampliar los conocimientos sobre Historia de las Matemáticas.

Análisis de los videos. Con los fragmentos de video subtitulados, se debía realizar el respectivo análisis de las unidades hermenéuticas definidas en el software Atlas-ti, a partir de las categorías de análisis por el grupo. Para ello se conformaron subequipos en los que participamos de manera activa con uno o dos investigadores, convirtiéndonos en verdaderas “asistentes de investigación”. Esta exigente experiencia nos brindó herramientas para nuestro aprendizaje; una de ellas fue asignar un significado especial al trabajo en grupo y al trabajo colaborativo.

Escritura y presentación de una ponencia. Al finalizar el semestre 2013-2 se realizó un artículo en el que se describe el papel de la Historia de las Matemáticas en el curso objeto de estudio, a partir de una visión de diferentes documentos que lo componen. Con el ánimo de divulgar su contenido, se escribió y presentó una ponencia en el marco de un evento internacional (Herrera & Osorio, 2014). Además de la valoración de la dificultad de la escritura de un documento académico, la experiencia arrojó otros aprendizajes y sentimientos. Fue natural sentir nerviosismo, originado por la falta de experiencia al hablar en público y por la angustia de que el tiempo dado (aproximadamente 20 minutos) fuera insuficiente; sin embargo, tras una buena preparación de la presentación y ensayar la ponencia varias veces, los resultados fueron exitosos, se dejó al lado el nerviosismo y se mostró el trabajo hecho obteniendo una gran satisfacción.

Diapositivas, trámites y otros. Otras tareas que hacen parte del grupo y del proyecto, tienen que ver con trámites administrativos, elaboración de diapositivas a partir de documentos producidos por otros miembros del grupo y manejo de software (*v.g.*, Mendeley, Endnote). Uno de los trámites más importantes fue la actualización del “GrupLAC”, pues nos puso en contacto con el sistema de medición y reconocimiento de grupos en Colciencias y evidenció el alto nivel académico de los investigadores del grupo.

Constitución de REDFORMA. Apoyar la consolidación de la “Red colombiana de formadores de profesores de Matemáticas” (la cual convoca a los académicos interesados en el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas) fue una de las tareas desarrolladas. Como parte de este trabajo se actualizó un grupo en Facebook, se contactó a coordinadores de las Licenciaturas en Matemáticas de todo el país y se asistió a una reunión en el Ministerio de Educación Nacional. Ello permitió un contacto directo con agentes de la comunidad académica nacional y esbozó un panorama de acciones futuras para el grupo y para nosotras como parte del mismo.

Conclusiones

Ser monitora del grupo RE-MATE se puede definir como una gran experiencia por diferentes aspectos que contribuyen a la formación del profesor y que abren la mente a nuevas cosas, interrogantes, retos. Se tiene la posibilidad de aprender en cada actividad, desarrollando ciertas habilidades que son complejas, pero que en el ejercicio de la docencia son fundamentales, como lo son la comunicación oral y escrita, el manejo del público, el uso de software necesarios para organizar y presentar información, el trabajo en grupo, el estudio de documentos y la abstracción de ideas que contribuyan en las discusiones del grupo, la interacción con personas interesadas en la Educación del Profesor de Matemáticas, la elaboración de documentos necesarios para tramitar solicitudes, etc.

Para contribuir en el desarrollo del proyecto mencionado, se requirió de constancia, interés, dedicación, esfuerzo, ganas de aprender y de desarrollar las actividades lo mejor posible. Como se pudo notar, nuestro papel fue adquiriendo mayor importancia y significado en el grupo; igualmente se fueron modificando las experiencias iniciales llegando a un punto en que la investigación del campo de la EPM se convirtió en un interés para continuar en el grupo. De esta forma, la monitoria abrió puertas principalmente en los ámbitos académico y laboral por todo aquello que se aprende, la experiencia adquirida y el reconocimiento que los profesores del grupo nos han dado. Todo esto no se hubiera logrado sin el apoyo de los profesores investigadores, a quienes expresamos nuestro sincero agradecimiento.

Referencias

Herrera, Y. P., & Osorio, K. E. (2014). *Papel de la historia de las matemáticas en un curso de enseñanza y aprendizaje de la aritmética y el álgebra: visión desde una perspectiva documental.* Ponencia presentada en el VI Congreso internacional en modelación y formación de Ciencias Básicas, Medellín.

Mora, L., Jiménez, W., & Guacaneme, E. (2014). *Unidades de análisis para identificar la relación "conocimiento histórico - conocimiento didáctico del contenido".* [En proceso]. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá D.C.

UPN, (2004). Acuerdo 038 del Consejo Superior.

Series de potencias en Newton - Leibniz

Ilustración 1. Isaac Newton ((1642-1727); Gottfried Leibniz (1646-1716)

Jorge Enrique Mendoza Guzmán[1]

Resumen. En este artículo de corte histórico se muestra el tratamiento brindado por Newton y Leibniz a las series de potencias. La razón de esto se evidencia cuando comenzamos a estudiar el tránsito curva- ecuación. Función y analizar los elementos de causalidad que constituyeron este circuito. Justamente nos encontramos que las series de potencias permearon la representación y solución de problemas de orden físico y la discusión relacionada con la convergencia.

Palabras clave: Series de potencias, Cálculo infinitesimal, binomio de Newton.

Introducción

El nacimiento del cálculo se encuentra ligado con la solución del problema de la cuadratura de figuras planas, proveniente de la antigüedad griega. Dicho problema, permitió crear líneas de desarrollo a partir de algunos conocimientos intuitivos que en parte provienen de las obras de Descartes, Fermat, Wallis, Mercator, Barrow, entre otros.

El conocimiento matemático instaurado hasta el siglo XVII se constituyó en un aparato teórico donde abundaban las ecuaciones (Descartes), los métodos para determinar tangentes y normales a una curva (Descartes, Fermat), el uso de series numéricas para hallar cuadraturas (Wallis), el cálculo de logaritmos (Mercator) y las series de potencias (Newton, Mercator, Leibniz).

Estos últimos representan gran interés en este trabajo, puesto que constituyen un elemento clave a la hora de hablar de la representación que adquieren las curvas que fueron relegadas por Descartes, las curvas mecánicas. Dicha representación conduce a que siglos más tarde el uso de las series de potencias se convirtiera en una potente herramienta para encontrar cuadraturas y resolver problemas relacionados con la representación.

Tal como se afirma, (Mendoza Guzmán I, 2013.) uno de los precursores del uso de la representación de funciones, mediante series de potencias, fue Isaac Newton con el establecimiento de la serie binomial entre 1664 y 1665. A partir de este desarrollo, existió la posibilidad de obtener múltiples representaciones para funciones trascendentes y de potencias negativas como la hipérbola, pero el desarrollo establecido por Newton fue resultado de la lectura de la aritmética de Wallis. Sin embargo en *De analysi*, es la obra donde dedica gran parte a la expansión mediante ecuaciones infinitas.

Series de potencias en Newton

El paso de la curva a la ecuación, que se evidencia en la obra de Descartes, lleva arraigado la unión de lo geométrico y lo analítico. El punto clave que permite a Newton ampliar el universo de ecuaciones y de nuevas representaciones es el establecimiento de la serie binomial. Justamente, Newton se pregunta por los valores intermedios que pueden adquirir las siguientes curvas (Tabla 2), cuando el exponente corresponde a un fraccionario irreducible, para encontrar su cuadratura.

[1] Licenciado en Matemáticas, Universidad del Valle. Profesor Semilleros de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Colombia; e-mail: jorge.mendoza@correounivalle.edu.co

Curvas	Cuadraturas
$(1-x^2)^{\frac{0}{2}} = 1$	$z = x$
$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} =$	
$(1-x^2)^{\frac{2}{2}} = 1 - x^2$	$z = x - \frac{1}{3}x^3$
$(1-x^2)^{\frac{3}{2}} =$	
$(1-x^2)^{\frac{4}{2}} = (1-x^2)^2$	$z = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$
$(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$	
$(1-x^2)^{\frac{6}{2}} = (1-x^2)^3$	$z = x - \frac{3}{3}x^2 + \frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{7}x^4$

Tabla 1. Cuadraturas de algunas curvas de la forma $(1\text{-}X^2)^N$

Esta pregunta es aclarada por la interpolación que realiza Wallis, donde en 1665 establece la famosa serie binomial o el binomio de Newton y en una carta enviada al Royal Society de Londres menciona:

> La extracción de raíces es mucho más corta por este teorema.[2]
>
> Donde *P+PQ* significan que la cantidad de una raíz o una potencia, o la raíz de una potencia, puede ser hallada; *P* significa el primer término de esa cantidad, *Q* los términos restantes dividido por el primero, $\frac{m}{n}$ el valor numérico de la potencia *P+PQ,* donde esa potencia es entera o una fracción positiva o negativa.
>
> $(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{etc.}(1)$[3]
>
> Tomando los símbolos *A,B,C* como el término anterior; de la forma $A = P^{\frac{m}{n}}, B = \frac{m}{n}AQ$

La condición necesaria que $|x|<1$ para la convergencia de la serie, fue una condición que no estableció Newton, más bien fue mencionada por Wallis tal como se muestra en la Epístola prior [4] y establecida explícitamente por Cauchy en su curso de análisis.

La influencia del trabajo de Wallis en Newton promovió la introducción de una nueva notación para el uso de potencias racionales negativas, por ejemplo expresiones de la forma *aa,aaa,etc.*, se escriben de la forma a^2, a^3,*etc.,* de esta manera $\sqrt{a}, \sqrt{a^3}, \sqrt{a^5}$ se podían escribir como a $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{5}{2}}$ y $\frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{a^3}$ como a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}.

Justamente el descubrimiento de la serie binomial, usando el método tabular de interpolación de Wallis, proporcionó a Newton una forma de extraer raíces cuadradas y de encontrar cocientes de ecuaciones de la forma $\frac{a}{b+cx}$ sin embargo, Newton no realiza una demostración formal del binomio.

Newton realiza múltiples cuadraturas para curvas de la forma $(1- x^2)^n$, y se pregunta por el caso en que el exponente sea fraccionario.

Uno de los puntos claves en los aportes de Newton, es realizar la cuadratura del círculo; la cual corresponde a los valores intermedios que no aparecen en la tabla anterior. Newton busca realizar un proceso de interpolación al estilo de Wallis. Para lo cual se apoya en el binomio que él mismo descubrió. Aquí intervienen primigeniamente unos objetos denominados series de potencias, donde a partir de la expansión del binomio y considerando la cantidad $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ que corresponde a la ecuación de un círculo, dicha expansión se puede escribir de la siguiente manera

$$1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots$$

Este resultado matemático presenta una nueva forma de obtener y amarrar series de potencias a una curva,[5] la cual expresa una suma infinita donde su característica principal viene determinada por una progresión de la forma $1, x^2, x^4, \ldots, x^{2n}$; a partir de allí se evidencia un cambio cualitativo y estructural en la forma de ver las ecuaciones. En otras palabras, la potencia de la técnica adquiere sentido al establecer la igualdad, es así como el binomio establece una salida conceptual al problema de las cuadraturas. Cabe señalar que, el hecho de hallar una serie infinita y amarrarla a una curva, abre paso a una de las primeras representaciones de funciones mediante series de potencias. Si bien uno de los elementos de causalidad teórica que llevaron a Newton a obtener dichas representaciones fueron las lecturas previas de Descartes, Wallis y Pascal.

Luego de tener una expansión mediante series de potencias y a partir de los resultados obtenidos por

2. Tomado del fragmento de la carta enviada al Sr. Oldenburg el 13 de junio de 1676. en (Newton I, 1711, pág. 64)

3. Modernamente el binomio se puede escribir como: $(p+q)^r = p^r + rp^{r-1}q + \frac{r(r-1)}{2!}p^{r-2}q^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}p^{r-3}q^3 + \cdots$

4 Ver (Newton III, 1711). Precisamente quien estudia los valores que puede adquirir esta serie es Cauchy en su curso de análisis.

5. En este caso la ecuación finita hace referencia a la del círculo $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

Cavalieri y reafirmados por Wallis, en los cuales el área de una curva de la forma x^n queda determinada por la expresión $\frac{a^{n+1}}{n+1}x^{n+1}$, Newton realiza una integración término a término de la expansión para el círculo obteniendo como resultado

$$x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}-\frac{x^7}{112}+\cdots$$

La representación mediante series de potencias resolvió un cúmulo de problemas como la cuadratura del círculo, la longitud de las curvas, abriendo una relación entre el problema de la cuadratura y anticuadratura. Pero Newton no sólo labora con las curvas geométricas (algebraicas) también lo hace con las mecánicas ¿Cuál es su tratamiento?

En el apartado del *análisis mediante ecuaciones infinitas*[6] se encuentra dedicado en extenso el tratamiento para dichas curvas, bajo el título "Aplicación de lo anteriormente explicado a curvas mecánicas"[7], una de estas curvas es la trocoide o cicloide

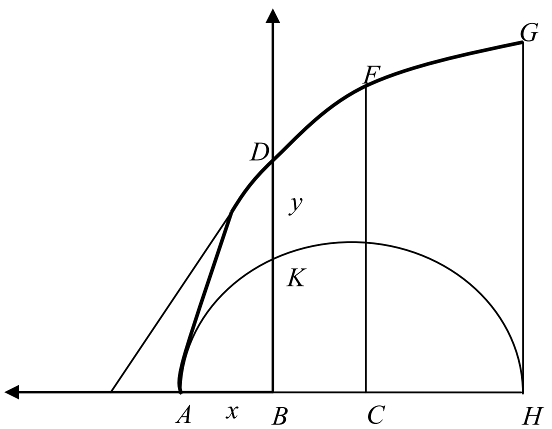


Figura 1. La trocoide o cicloide.

Newton, al igual que Descartes, asigna un "sistema coordenado" *(x,y)* de forma que $AB=x$ y $BD=y$, y considera un segmento unidad $AH=1$, el propósito de Newton es encontrar la superficie *ABD*. Tras una serie de consideraciones relacionadas con las propiedades geométricas de la cicloide, Newton encuentra que el área de la cicloide corresponde a una serie de potencias, que es:

$$ABD=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}-\cdots$$

Los métodos aplicados de Newton para las curvas mecánicas fueron utilizados para encontrar las longitudes de arco, el área bajo la curva y conocer propiedades de las curvas. Justamente otra de las curvas mecánicas que Newton trabaja es la mencionada anteriormente en el capítulo I, la cuadratriz de Hipias, al igual que para la cicloide Newton calcula el área bajo la curva con lo que obtiene una serie de potencias.

Uno de los problemas resueltos por Newton aplicando las series de potencias es el relacionado con la reversión de series, dicho problema consistía en dada una serie de potencias de la forma $z=a_n x^n$ encontrar $x=b_n z^n$, en términos generales el procedimiento adoptado por Newton, en el caso de la expansión para el área de la hipérbola

$$z=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5\ldots$$

Newton considera cinco términos para encontrar a en términos de, en este caso corresponde al siguiente polinomio finito, [8]

$$0=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^5-z.$$

Tras una serie de consideraciones algebraicas Newton obtiene, para la serie anterior,

$$x=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5,$$

La cual corresponde a la expansión para e^z. Todos estos resultados se constituyeron indudablemente en un indicador de que el uso de las series de potencias permitía generar nuevos resultados que sustentaban los métodos para encontrar aproximaciones y calcular áreas. Todo esto apunta a la manera de asociar series de potencias a las cuadraturas de las curvas mecánicas; entre ellas Newton se ocupa de calcular el área de la cicloide y la cuadratriz. De esta forma, dichas curvas mecánicas que fueron conocidas por los antiguos obtienen un tratamiento que involucra series de potencias. Para ello Newton se vale de las series para el seno y coseno, que fueron descubiertas por él, al aplicar el método de reversión de series.

[6] (Newton I, 1711)

[7] Al igual que Descartes, Newton distingue curvas geométricas y mecánicas (Newton III, 1711, pág. 49)

[8] Para entrar en detalle del procedimiento realizado por Newton para la reversión de series ver (Newton III, 1711)

La introducción de las series de potencias para el coseno y seno abren campo a la idea de la variación, de cierta dependencia implícita entre la ordenada y la abscisa, respecto al movimiento y una relación entre las cantidades involucradas, precisamente en el tratado de método de series y fluxiones, Newton introduce la idea de variación al establecer el cociente que involucra $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Siendo estas cantidades las respectivas fluxiones de *x* e *y*.

Todo este desarrollo propició diferentes líneas de evolución que posibilitaron la ampliación de una nueva ciencia, el cálculo. Tal como se afirma en (Maanen, 2003) "El cálculo se convierte en sí mismo, solo cuando los matemáticos descubren que la diferenciación e integración son operaciones inversas.

La representación mediante series de potencias adquiere gran fuerza en la obra de Newton, en su *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones*[9], donde dedica principalmente líneas a la expansión de ecuaciones y la reducción de divisiones de la forma $\frac{a^2}{b+x}$, obteniendo como resultado series infinitas de fracciones con numeradores y denominadores simples.

Los aportes de Newton a la teoría de series fueron de gran importancia puesto que ellos constituyeron una herramienta que permitía conocer acerca de la convergencia. Sin embargo esta idea de convergencia no es algo que estuviera bien definida.

Series de potencias en Leibniz

El tratamiento brindado por Leibniz (1646 - 1716) a las series, es geométrico; usa series infinitas de números, para obtener resultados aritméticos. En particular las relacionadas con las geométricas.[10] A diferencia de Newton, Leibniz se interesa por las diferencias entre secuencias numéricas, por ejemplo él caracteriza que para una secuencia numérica $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y definidas las diferencias de sus términos como $d_i = a_i - a_{i-1}$ la suma de los d_n está dada por

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0.$$

Leibniz estaba inaugurando un proceso sin duda inductivo que permitió extender para conocer otras sumas, como $1+2+3+\cdots+(2n-1)=n^2$.

[9] Ver (Newton II, 2001)

[10] Recordemos que la manera de generar una serie geométrica puede darse con los términos de una progresión geométrica, es decir, $ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^n$.

También Leibniz encuentra expansiones mediante series de potencias para el seno, coseno, logaritmo y arcotangente. Leibniz es el primero en utilizar series de potencias como solución a ecuaciones diferenciales, su método en términos generales consiste en tomar casos particulares como el caso de la derivada de $y = a \log \frac{a+x}{a}$, , a Leibniz le interesa encontrar y expresada mediante una serie infinita. Hay un reconocimiento de los procesos inversos entre *y* y *dy*.

En el caso de la derivada anterior y expresándola mediante una EE.DD lineal adquiere la forma

$$a\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} - a = 0$$

Leibniz admite que una expresión "y" se puede expresar como $y = Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \cdots$[11], debido a la notación establecida por Leibniz

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \cdots + \cdots$$

Sustituyendo esta última ecuación es posible determinar los coeficientes A,B,C,D,… Finalmente se encuentra la expansión para $y = x - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3} + \cdots$

El tratamiento relacionado con la solución de ecuaciones diferenciales, cuya solución involucra series de potencias fue un elemento determinante en lo que respecta a la constitución de la teoría de series; con esta técnica se comienza a evidenciar nuestra tesis principal: las series de potencias permiten ampliar y producir nuevas comprensiones de resultados conocidos y desconocidos, se constituyen en un elemento que de una u otra manera permiten establecer conexiones más generales entre curvas, funciones y otros conceptos matemáticos.[12]

Indudablemente el universo matemático poblado por ecuaciones y series de potencias, fue aumentando el interés por estudiar dichos elementos. Todo esto permeó la constitución de la teoría de series y el tratamiento de las mismas. Aunque en el universo de las series, las de potencias, en particular,

[11] Leibniz utiliza el siguiente principio establecido en *Supplementum geometriae praticae*. Una serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{\alpha_k}$ es igual a 0 para cada x en un intervalo *I* si solo si todos los coeficientes b_k *(k=0,1,...)* son separadamente igual a cero. (Ferraro, 2008, pág. 42)

[12] Justamente uno de los resultados de esta tesis es la publicación de un artículo, "Los polinomios particulares: Una definición para exploraciones cartesianas") donde se apoyó lo anteriormente dicho. En dicho artículo se halla y se demuestra un teorema que relaciona las series de potencias de la forma con la geometría analítica permitiendo combinar series de potencias con las derivadas de las mismas y obtener resultados atractivos que producen nuevas comprensiones sobre conceptos ya conocidos . Ver (Mendoza Guzmán I, 2013.)

representan un caso particular de series; el siguiente diagrama ilustra un poco lo mencionado.

$$f(x+h) = a_0 + a_1 h + a_2 \frac{h^2}{2} + a_2 \frac{h^3}{3} + \cdots + \cdots,$$

Donde los coeficientes $a_0, a_1, a_3, \ldots$, Lagrange los denominaba funciones derivadas; todo este bagaje conceptual posibilitó la instauración de una técnica, que permitiera obtener expansiones de funciones mediante una forma analítica.

Referencias

Ferraro, G. (2008). *The rise and development of the Theory of Series up to the Early 1820s.* New York: Springer.

Maanen, J. V. (2003). Precursors of Differentiation and Integration. En H. N. Janhke, *A history of analysis* (págs. 41-72). Rhode Island: American Mathematical Society.

Mendoza Guzmán I, J. E. (2013.). Los polinomios particulares: una definición para exploraciones cartesianas. *Revista digital Matemática, educación e Internet, 14*(1), 1-5.

Newton I, I. (1711). *Analysis Per Quantitatum Series, Fluxiones, ac differentias: cum Enumeratione Linearum Tertii Ordinis* (Vol. 141). (A. J. Durán Guardeño, J. Pérez Fernández, Edits., & J. L. Tamayo Arantegui, Trad.) Londres, España: Real Sociedad Matemáticas Española.

Newton II, I. (2001). *Tratado de método de series y fluxiones.* (M. Panza, Ed.) México: Mathema.

Newton III, I. (1711). *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias con una enumeración de las líneas de tercer orden.* (A. J. Durán Guardeño, F. J. Pérez Fernández, Edits., & J. L. Arantegui Tamayo, Trad.) Real Sociedad Matemática Española SAEM " Thales".

Taylor, B. (1715). *Brook Taylor : METHODUS INCREMENTORUM DIRECTA & INVERSA (1715).*

¡Yo me llamo...Euler!

Jeraldyn Angulo Moreno[1]
Edgar Alberto Guacaneme Suárez[2]

Introducción

Muchos de los jóvenes colombianos viven en las aulas experiencias que les llevan a pensar que las Matemáticas son una disciplina para genios; para ellos la actividad matemática es entonces solo realizable por quienes a la naturaleza dotó de una inteligencia especial y, al parecer, la naturaleza no fue muy benévola con los compatriotas colombianos. Esta postura acopia para sí razones de verdad cuando se observa el muy reducido número de gente colombiana que se destaca en el concierto internacional de las Matemáticas y en el bajísimo número de estudiantes que deciden estudiar profesionalmente las Matemáticas o que reconocen la posibilidad de llegar a ser profesores de Matemáticas.

Paradójicamente es en esas mismas aulas en donde los docentes de Matemáticas advierten que todos los estudiantes que tienen el deseo de aprender, sí desarrollan actividad matemática y que, como es natural, algunos de estos aprendices de Matemáticas se destacan por sus muestras de creatividad, pasión, disciplina y genialidad. En suma, advierten que en las aulas sí es posible hacer Matemáticas, aunque no necesariamente estas sean aportes innovadores para la humanidad, pero sí para los individuos implicados, ni que con estas se vaya a figurar como matemáticos famosos para la humanidad.

Una reflexión como la anterior ha sido lograda en el desarrollo de un trabajo de grado de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), titulado "Catálogo de videos sobre Historia de las Matemáticas", que surge en el marco de una intencionalidad genérica: mostrar a los estudiantes otra cara de las Matemáticas que permita una humanización de ellas a través de su historia.

En tal trabajo se identificaron y seleccionaron videos de Historia de las Matemáticas, con el fin de estudiarlos y elaborar un material útil para los profesores, tanto en la enseñanza de las Matemáticas, como para el afianzamiento de sus conocimientos profesionales. El material audiovisual seleccionado corresponde a los documentales titulados "Universo matemático", "*Story of maths*", "La historia del uno" y "El legado de Pitágoras". De cada uno de los capítulos o secciones de estos se ha realizado una reseña, un resumen general y una red temática; a partir de ello y de discusiones sobre el contenido de los videos, se han generado reflexiones, desde/para la perspectiva profesional de los profesores de Matemáticas.

Este documento muestra entonces un ejemplo concreto del trabajo que se ha venido desarrollando. Para ello, dentro de los videos trabajados se seleccionó uno titulado "Euler superestrella", correspondiente al capítulo sexto de la serie "Universo matemático". Este video permite no solo resaltar los grandes aportes de este genio, sino además generar una reflexión, a partir de su prolífica lucidez, sobre la expresión de la genialidad en Matemáticas en las aulas colombianas. Así, en lo que sigue, se presenta sintéticamente un resumen del contenido del video, una reseña del mismo, la red temática y la reflexión citada antes.

***Abstract* del capítulo "Euler superestrella"**

Si hubiese un premio al matemático más prolífico, sin duda este sería para Leonardo Euler, y no precisamente por haber tenido trece hijos, sino por haber hecho excepcionales aportes a todas las ramas de las Matemáticas de su época. Su gran ingenio para las Matemáticas se expresó, además, en un asombroso manejo de los números y en un extraño don para realizar mentalmente extraordinarios cálculos aritméticos.

Reseña del capítulo "Euler superestrella"

Euler fue un matemático entrañable y no solo por sus trabajos. A lo largo del siglo XVIII ensanchó las fronteras del conocimiento matemático en todos sus campos. Sus obras completas, *Opera Omnia*, ocupan más de ochenta y siete grandes volúmenes, y la

1. Estudiante en Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; e-mail: dma2_jangulo@pedagogica.edu.co
2. Profesor en Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; e-mail: guacaneme@pedagogica.edu.co

trascendencia y profundidad de sus descubrimientos hace dudar a algunos incrédulos que puedan ser obra de una sola persona. Euler no era una persona normal, era un genio. A los diecinueve años ganó el premio de la Academia de Ciencias de Francia por un trabajo sobre la mejor ubicación de los mástiles de los barcos; esto puede no ser tan sorprendente, salvo por el hecho que Euler nació en Basilea (Suiza) y en su vida había visto un barco. Luego volvería a ganar otros once premios de la Academia. Con solo veintiséis años, Euler ocupa la cátedra de Filosofía Natural en San Petersburgo; en esa época resuelve el problema de "los siete puentes de Konigsberg", solución que dio origen a la Teoría de grafos.

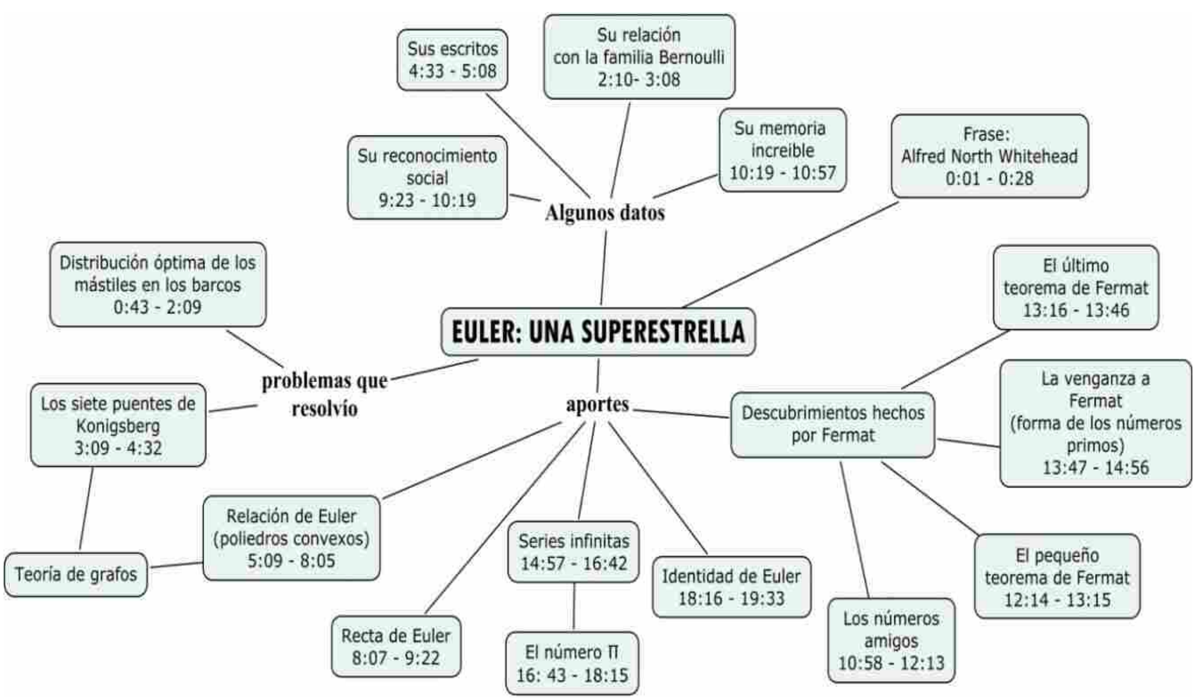
A lo largo de su vida, y a pesar de sus constantes problemas visuales, Euler hizo descubrimientos y aportes asombrosos a las Matemáticas, algunos de ellos se describen a continuación:

- ***Relación de Euler.*** Establece que para poliedros convexos, el número de caras más números de vértices, es igual al número de aristas más dos.
- ***Recta de Euler.*** Muestra que en cualquier triángulo el ortocentro, el circuncentro y el baricentro son colineales.
- ***Series infinitas.*** Calculó el resultado de series infinitas con numerosos decimales y se aproximó a varios resultados relacionados con π; dentro de ellos "la suma de los recíprocos de los cuadrados de todos los enteros positivos es $\frac{\pi^2}{6}$"
- ***Identidad de Euler***. $e^{i\pi}+1=0$. Notable expresión que permite relacionar cinco paradigmáticos números utilizados en las Matemáticas y provenientes de distintas ramas de las mismas.

Con una gran mente para los cálculos, Euler no podía dejar de responder a los retos planteados por Fermat y dio respuesta satisfactoria a la mayoría de ellos; encontró sesenta parejas de números amigos, demostró el pequeño teorema de Fermat y, aunque el famoso último teorema de Fermat no estuvo entre sus hallazgos, logró algunos adelantos sobre él. Sin ser suficiente todo lo anterior, Euler corrigió un error cometido por Fermat a la hora de caracterizar los números primos.

En suma, el video relata en veintiún minutos, algunas de las hazañas hechas por un hombre que hoy está asociado a resultados de casi todas las ramas de las Matemáticas: Análisis, Álgebra, Teoría de Números, Series, Geometría, Astronomía, etc. Lo más sorprendente es que Euler escribió más de la mitad de su obra completamente ciego, realizando sus cálculos mentalmente; nada extraño para alguien que era capaz de recitar completamente y en Latín La Eneida.

Red temática del capítulo "Euler superestrella"



Reflexión a partir del capítulo "Euler superestrella"

Hay algo que la Historia de las Matemáticas nos muestra claramente: el desarrollo de las Matemáticas es producto de la actividad de la humanidad sobre situaciones problemáticas específicas y de un esmero arraigado por entender y transformar el mundo. Además, que los matemáticos, seres aparentemente místicos, no son más que personas que dieron vía libre a una pasión que los llevó a dedicar su vida, y lo mejor de sí, a hacer una apropiación del mundo que los rodeaba, encontrando en las Matemáticas una valiosa herramienta para dicho cometido. Dentro de ellos ha habido algunos con una competencia excepcional para hacer Matemáticas que lleva a la humanidad a registrar sus nombres, al lado de sus obras matemáticas, y les conduce a ser considerados genios. Un ejemplo de tal genialidad es Euler; un hombre apasionado, que dedicó su vida, a pesar de los obstáculos, a ensanchar los límites del conocimiento matemático. Sus construcciones y hallazgos son arrolladores, tanto que nos cuesta creer que un solo hombre haya logrado tan maravillosas hazañas.

Queda claro entonces que para dejar plasmado el nombre de un matemático en la historia de la humanidad se requiere ser un genio; solo ellos y sus obras trascienden. Pero para un profesor de Matemáticas, y para muchos matemáticos cuya vida y obra queda en el anonimato, es claro que hacer Matemáticas es posible y ello casi nunca lleva al estrellato universal. Es decir, para pasar a la historia es necesario ser un genio, pero para hacer Matemáticas y deleitarnos con ellas, no. Son dignos de ser matemáticos (pues hacen Matemáticas) los niños, los jóvenes, los padres y todo aquel que encuentre gusto en ellas, en sus retos, en sus plausibles respuestas, en sus obras imperfectas, etc. Dedicarse a dicho espectáculo no garantiza ser famoso, pero sí una satisfacción personal y un modo diferente de ver y entender el mundo.

Ahora bien, los destacados matemáticos no solo lo fueron por su valioso ingenio. La historia nos muestra que la mayoría de ellos contaban con condiciones económicas y sociales favorables; que pertenecieron a destacadas escuelas y siempre contaron con un espacio académico adecuado y acorde con su trabajo, que los impulsaba a desarrollar tan meritorios trabajos, ya que promovían la racionalidad y el estudio mismo de las Matemáticas.

Esto, nos lleva a cuestionar los espacios que se brindan hoy en día a los estudiantes: ¿Hasta dónde los profesores de Matemáticas hacemos de las clases un espacio académico que incentive a los niños y jóvenes a pensar y a proponer?, ¿qué tan a gusto se sienten en la clase y de qué forma se promueve el quehacer Matemático?, ¿con qué riqueza académica cuentan los hogares colombianos que favorezca un ambiente de crecimiento intelectual y personal a favor de las Matemáticas?, ¿no es hora ya de que los niños y jóvenes vean en la clase de Matemáticas un espacio ameno para la diversión y creación?, ¿no urge la educación de unas Matemáticas más reales y humanas?, ¿no soñamos con que más y más estudiantes sientan gusto por el quehacer matemático? y ¿qué tan cerca estamos de que alguno de nuestros estudiantes, emulando uno de los programas concurso de nuestra televisión, diga: "Yo me llamo … Euler"?

Pensamiento de los estudiantes respecto a área y perímetro

***Kevin Johan Vásquez Reyes*[1]**
***Shirley Tatiana Galvis Gómez*[2]**

A menudo los profesores de matemáticas son estigmatizados como los profesores más estrictos con la materia más difícil para todos los estudiantes, todos sabemos que la enseñanza de matemáticas no es una tarea sencilla, esa es una de las razones de la realización de este trabajo, que en resumen trata de cómo podríamos abordar una problemática común del aula de clase de matemáticas, una problemática relacionada con los conceptos de área y perímetro.

En las aulas de clase de matemáticas los docentes tienen como referente los estándares curriculares para la educación matemática del Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006) en donde se dan ejemplos de lo que deben lograr los estudiantes en sus clases; para quinto grado con relación al área y perímetro los estándares dicen que el estudiante debe: "Desarrollar, comprender y utilizar fórmulas para encontrar áreas de paralelogramos y triángulos" y además, debe "Manejar con fluidez las unidades métricas cuadradas (cm^2, m^2, etc.)".

Muchos docentes de matemáticas tienen concepciones tradicionalistas que los llevan a pensar que el conocimiento es estático, es decir, que el único sitio en que se encuentra es en libros de textos, además de tener la idea que el conocimiento solamente se transmite en una sola vía: del docente al estudiante, sin dar cabida a la posibilidad de que el docente también aprende del estudiante; todo esto conlleva a que los estudiantes atrofien su capacidad de generar conocimientos en muchas materias, en especial en matemáticas que siempre han sido vistas como "El coco" en la escuela. (Ver, por ejemplo, Agudelo-Valderrama, 2002).

En nuestro proyecto nos hemos enfocado en las dificultades que tienen los estudiantes de quinto grado de primaria en la creación de conceptos de área y perímetro y su relación; y el propósito del mismo es profundizar nuestro conocimiento sobre posibles situaciones que se nos puedan presentar en las aulas de clase como futuros docentes y así, apoyar la formación de conceptos en nuestros estudiantes.

Nuestra experiencia ha mostrado cómo muchos de nuestros compañeros desde la escuela tienen dificultades a la hora de aprender sobre área y perímetro, la gran mayoría de ellos realizaban los ejercicios propuestos en clase desconociendo por completo el origen de los algoritmos que usaban, llevándolos a un desconocimiento de las posibles aplicaciones del área y del perímetro en la vida cotidiana.

Muchas investigaciones (Agudelo-Valderrama, 2005; Carrillo y García, 2006; Marchett, et al., 2005; entre otros) muestran que en la enseñanza de las matemáticas en general persisten los enfoques Instrumentalistas (Skemp, 2006), siendo estos enfoques descritos como 'reglas sin razones' que hasta hace poco eran considerados como la verdadera "comprensión".

Supongamos que en una clase de matemáticas el profesor ha explicado la fórmula para hallar el área de un rectángulo, la cual está dada por A = L x B. Uno de los estudiantes manifiesta no comprender, a lo que el profesor le explica: "La fórmula dice que para hallar el área de un rectángulo, se multiplica la base por la altura", a lo cual el alumno parece entender y procede a realizar ejercicios. Si le dijéramos que en realidad no ha entendido, el estudiante no estaría de acuerdo, argumentando que tiene todas las respuestas correctas (Skemp, 2006).

Vemos en el ejemplo anterior, que el estudiante cree "comprender" el proceso para hallar el área de un rectángulo, pero lo que en realidad hace, es un proceso de mecanización de un algoritmo, del cual desconoce su origen y significado.

Hablando de la educación matemática en Colombia, la situación no es muy distinta al ejemplo anterior, tal es el caso mostrado más adelante por Agudelo-Valderrama (2000):

[1] Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima, Colombia;
e-mail: Kevin_vasquez2013@outlook.com
[2] Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima, Colombia; stgalvisg@ut.edu.co

(…) El profesor Juan empieza la lección preguntando si alguien se acuerda cómo se calcula el área del rectángulo. Un alumno levanta la mano y dice: “profesor, el área del rectángulo es igual al producto de la base por la altura”. El profesor le hace una indicación de que su respuesta está correcta, dibuja un rectángulo en el tablero, anota sus dimensiones y les pide a los alumnos que calculen el área. Minutos más tarde cuando es claro que todos los alumnos saben cómo hacer el cálculo, el profesor dice: “ahora vamos a aprender a encontrar el área de un paralelogramo. Un paralelogramo es así:” (dibuja un paralelogramo en el tablero, ver figura 1).

Le da nombre a los vértices del paralelogramo A, B, C, D. Revisa que todos los alumnos estén prestando atención, y dice: “ahora trazamos una perpendicular desde el vértice izquierdo superior así, y otra perpendicular desde el vértice superior derecho, así” (ver figura 1, segmentos AE y BF). Luego dice, “se extiende la línea de la base (DC) hacia la derecha así, y bautizamos estos nuevos puntos como E y F”.

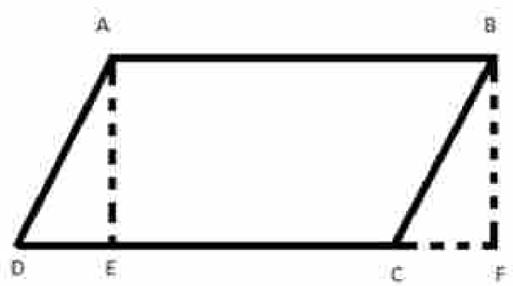


Figura 1

A continuación explica y da la prueba de que el área del paralelogramo ABCD es igual al área del rectángulo ABFE porque dos paralelas cortadas por una transversal…, y los ángulos E y F son iguales porque… Escribe expresiones ordenadas y claras a medida que explica cada paso y, al final, pregunta: ¿A qué es igual el área del rectángulo? Después de haber obtenido de los alumnos la respuesta ‘base por altura’ dice, “si el área del paralelogramo es igual al área del rectángulo entonces el área del paralelogramo es igual a base por altura”, y escribe en el tablero:

A paralelogramo = b x h

(…) En la siguiente clase la profesora María está allí otra vez, pues eso era lo acordado con el profesor Juan, y además ella había quedado con el interrogante de si los alumnos en verdad habían aprendido. El profesor Juan empieza la clase preguntando, “¿quién quiere explicar cómo se calcula el área del paralelogramo?” varios alumnos levantan al mano, y uno de ellos contesta cómo hacerlo, y da un ejemplo explicativo. El profesor se muestra satisfecho y plantea un problema para toda la clase. Muy pronto se hace evidente que todos los alumnos ya saben cómo hacerlo, pero la profesora María, quien sigue con su inquietud, le pregunta al profesor Juan si fuera posible que ella les hiciera una pregunta a los alumnos, y el profesor Juan accede inmediatamente.

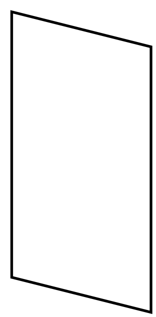


Figura 2

La profesora María dibuja en el tablero un paralelogramo como el que aparece en la figura 2, y les pregunta a los alumnos cómo harían para calcular el área. Algunos de ellos se muestran confundidos. Carlos contesta, “todavía no hemos visto eso”. Pero muchos están ocupados dibujado el paralelogramo y las líneas auxiliares, y luego la mayoría se quedan trancados. (p. 8-9)

En este caso podemos observar que, lo que los estudiantes hicieron fue entrenarse para aplicar mecánicamente el procedimiento para hallar el área de un paralelogramo, logrando así, una comprensión instrumental del tema.

En conclusión, con el trabajo realizado durante el transcurso de nuestra licenciatura titulado “Exploración del pensamiento de los estudiantes con respecto a los conceptos de área y perímetro de cuadriláteros”, hemos formulado una serie de actividades que podrían servir de ayuda pedagógica tanto a compañeros estudiantes como a docentes de matemáticas para hacer frente a la problemática descrita anteriormente.

Referencias

Agudelo-Valderrama, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y algebraico.* Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Agudelo-Valderrama, C. (2005). Explicaciones de ciertas actitudes hacia el cambio: las concepciones de los profesores y profesoras de matemáticas colombianos (as) sobre los factores determinantes de su practica de enseñanza del álgebra escolar. *EMA, 10* (3), 375-412.

Boyer, C. (1999). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial S.A.

García-Amadeo, G., & Carrillo, J. (2006). Relación entre perímetro y área: el caso de Patricia y las interacciones. *Investigación en educación matemática : actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (págs. 185-194). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Hopkins, D. (2008). *Hacia una Buena Escuela: Experiencias y Lecciones.* Santiago de Chile: Quebecor World Chile.

Karmiloff-Smith, A. (1994). *Más allá de la modularidad.* Madrid: Alianza Editorial.

Kemmis, S., & McTaggart, R. (1992). *Cómo planificar la Investigación-Acción.* Barcelona: Deakin University Press, Victoria.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Curriculares en Educación Matemática.* Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Skemp, R. (2006). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching in the middle school, 12*(2), 88-95.

Universidad
del Tolima