Revista
EJES
Educación Matemática

Universidad del Tolima

Facultad de Ciencias de la Educación
Licenciatura en Matemáticas
Revista Ejes - Número 3. 2015
ISSN: 2357-3724

Revista EJES

Educación Matemática

Universidad del Tolima

Revista EJES

Educación Matemática

Universidad del Tolima
Facultad de Ciencias de la Educación
Licenciatura en Matemáticas
Revista Ejes - Número 3. 2015.
pp. 1-98. ISSN: 2357-3724

ISSN: 2357-3724

Director-Editor
Msc. Ovímer Gutiérrez Jiménez

Coordinador editorial
Mg. Carlos David Leal Castro

Comité editorial
Ph.D. Carmen Beatriz Cuervo Arias
Msc. Rosemberg Peralta Vargas
Mg. Sergio Adrián García Cruz
Esp. Julián Andrés Rodríguez Vargas
Mg. Diego Ricardo Rojas Cuellar

Diseño y diagramación
Colors.Editores

Periodicidad
Anual

Tiraje
500 ejemplares

Corrección de estilo
Carlos David Leal Castro

Contenido

Editorial 9
Ovimer Gutiérrez Jiménez

Presentación 10
Andrés Felipe Velásquez Mosquera

1. El portafolio: una estrategia de evaluación como promotora de cambio en la concepción del significado de la evaluación 11
Dicleny Castro Carvajal
Miguel Ernesto Villarraga Rico
Universidad del Tolima

2. Uma investigação em geometria na escola básica com o geogebra 21
Hiago Portella De Portella
José Carlos Pinto *Leivas*
Centro Universitario Franciscano de Santa María UNIFRA - *RS - Brasil*

3. Programa de disciplina positiva (PDP) 27
Juan Gabriel Rodríguez Ramírez
Universidad del Tolima

4. Caracterización de los tipos de tareas en los instrumentos escritos de evaluación en la clase de Matemáticas: un estudio en la Educación Básica 33
Johanna Montejo Rozo
Edwar Fabián Panqueba Moreno
Universidad Pedagógica Nacional

5. La letra como número generalizado: algunos errores de estudiantes de grado noveno 37
William Eduardo Naranjo Triana
Universidad del Tolima

6. Hacia un concepto de fraccionarios en la Educación Básica 43
Jefferson Durán Triana
Ovímer Gutiérrez Jiménez
Universidad del Tolima

7. Una mirada: epistemología en la educación 47
Esteffany Ipuz Montoy
Diana Trilleros Duarte
Felipe Urueña Pérez
Universidad del Tolima

8. Visualização ou Ilusão otica: o que dizem os mestrandos 51
José Carlos Pinto Leivas
Centro Universitario Franciscano de Santa María UNIFRA - *RS - Brasil*

9. Sed de aprendizaje del ser humano, un proceso histórico 59
Gustavo Adolfo Trujillo Hurtado
Christian Eduardo Ticora León
Universidad del Tolima

10. Procesos de generalización a partir del estudio en el aula de los conectores lógicos de Peirce **63**
César Guillermo Rendón Mayorga
Universidad Pedagógica Nacional

11. Las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en matemáticas: reflexiones de una indagación en el aula **67**
William Eduardo Naranjo Triana
María Angélica Triana Tobar
Universidad del Tolima

12. Grupos de simetría de los polígonos: el caso del triángulo equilátero y el pentágono regular **74**
Diana Isabel Quintero Suica
Universidad Pedagógica Nacional

13. De la ecuación a la función: las primeras huellas del análisis **79**
Jorge Enrique Mendoza Guzmán
Universidad del Valle

14. Propuesta didáctica integral para el aprendizaje del análisis de gráficas a través del registro de percepción emocional en estudiantes de Básica Secundaria **86**
Carlos Mario Torres Ramírez
Diego Ricardo Rojas Cuellar
Ovimer Gutiérrez Jiménez
Universidad del Tolima

Editorial

"la Educación no cambia al mundo,
cambia a las personas que van a cambiar el mundo"
(Freire, 1966)

La presente publicación de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima refleja que hoy se consolida e institucionaliza un proyecto de escritura académica denominada *Ejes*. Es un honor para la dirección del programa presentar a la comunidad en general el tercer número de esta revista, en el que se publican artículos sobre temas diversos tales como educación matemática, didáctica, pedagogía, investigación, prácticas pedagógicas, los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas escolares, educación, relaciones entre escuela, estudiante y profesor, entre otros tópicos que sin duda contribuyen para potencializar la aprehensión de conceptos matemáticos tanto dentro como fuera del aula.

La revista *Ejes* se concibe como un espacio académico y de reflexión donde investigadores, profesores, graduados y estudiantes de nuestro programa y de otros con la misma denominación (o afines) pueden publicar y dar a conocer sus investigaciones, sus escritos, sus reflexiones, sus aportes a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, contribuyendo a mejorar las prácticas pedagógicas y el quehacer docente.

Esta tercera publicación cuenta con la participación de la comunidad educativa interesada en la Educación Matemática. Aportan a ella diferentes personas del programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima (UT), universidades nacionales como la Universidad Pedagógica Nacional, la Universidad del Valle y algunas universidades internacionales como el Centro Universitario Franciscano de Santa María (Brasil).

Entre los autores encontramos a los profesores Miguel Ernesto Villarraga Rico y Dicleny Castro Carvajal. También se incluyen en este número de la revista reflexiones del estudiante William Eduardo Naranjo, y textos de graduados como Esteffany Ipuz Monroy, Gustavo Adolfo Trujillo Hurtado, Christian Eduardo Ticora León, Juan Gabriel Rodríguez Ramírez, Ovimer Gutiérrez Jiménez y Diego Ricardo Rojas Cuellar, miembros de la Licenciatura en Matemáticas de la UT. De la Universidad Pedagógica Nacional tenemos a Johanna Montejo Rozo, Edwar Fabián Panqueba Moreno y a Diana Isabel Quintero Suica, mientras que de la Universidad del Valle acá se publican aportes de Jorge Enrique Mendoza Guzmán. Por su parte, del Centro Universitario Franciscano de Santa María (Brasil) acá se comparten los aportes de Hiago Portella de Portella y de José Carlos Pinto Leivas. Finalmente, se involucran otros autores como Jefferson Durán Triana, Diana Trilleros Duarte, Felipe Urueña Pérez y María Angélica Triana Tobar, quienes enriquecen este número de la revista en otros campos de reflexión.

Es grato contar con la participación de tantas personas quienes quisieron que sus escritos fueran compartidos con la comunidad académica. Es la oportunidad para invitar a quienes deseen exponer sus investigaciones, escritos y/o reflexiones en los próximos números de nuestra revista *Ejes*, la revista del programa Licenciatura en Matemáticas. Nuestro programa tiene una importante responsabilidad y un gran compromiso, algo que se puede materializar con una publicación que ojalá se perpetúe y evolucione en el trascurrir de los tiempos, proporcionando un espacio para la comunidad interesada en la formación de profesores en Educación Matemática.

Ovímer Gutiérrez Jiménez
Director de Programa, Licenciatura en Matemáticas

Presentación

Con la entrega de este número de la presente revista se desean difundir los aportes de nuestra comunidad académica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad del Tolima en diversas temáticas, de acuerdo con los saberes (pedagógicos, disciplinares, académicos) de la(s) licenciatura(s). Debe decirse que la presente revista surge en un complejo momento histórico–cultural que atraviesa nuestra alma máter, en el marco de procesos obligatorios de acreditación de alta calidad que son impuestos por parte del Ministerio de Educación Nacional (MEN), desconociendo la situación económica por la cual atraviesa la universidad pública colombiana.

Las facultades de educación del país agremiadas en la Asociación Colombiana de Facultades de Educación (ASCOFADE), integrada por 89 Facultades de Ciencias de la Educación de diferentes universidades públicas y privadas del país, así como un considerable número de académicos de varias universidades del país, han llamado la atención al MEN sobre los inconvenientes que para dichas facultades de educación se generan por la acelerada promulgación y aplicación casi inmediata de las normas referidas a procesos de acreditación de alta calidad de las licenciaturas, normas tales como el Decreto 2450 del 17 de diciembre de 2015. Por medio de éste se reglamentan las condiciones de calidad para el otorgamiento y la renovación del registro calificado de los programas académicos de licenciatura y los enfocados a la educación. A éste se adiciona el Decreto 1075 de 2015, único reglamentario del Sector Educación, y la Resolución Ministerial 2041 del 3 de febrero de 2016, por la cual se establecen las características específicas de calidad de los programas de Licenciatura para la obtención, renovación o modificación del registro calificado.

La comunidad académica de las facultades de educación del país lamenta que el MEN haya dado tan poca participación en las consideraciones de las normas en mención, teniendo en cuenta que estas tocan temas sensibles para las licenciaturas dentro de los cuales se hallan la práctica pedagógica y educativa, la investigación, distribución de créditos académicos, denominación de los programas de licenciatura(s), modalidades (presencial, virtual y a distancia), bilingüismo, acreditación de alta calidad y los requisitos para los (las) docentes formadores (as). Es importante destacar que estas normas expedidas de forma acelerada para obligar la acreditación de alta calidad, específicamente en lo concerniente a créditos académicos, la distribución de contenidos curriculares y competencias del educador, van en contravía de la autonomía universitaria contemplada en el Artículo 69 de la Constitución Política de Colombia y en el Artículo 28 de la Ley 30 de 1992.

Frente al panorama de la acreditación de alta calidad que es obligatoria para las licenciaturas de todo el país, las revistas de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad del Tolima se convierten en un espacio de difusión para que estudiantes, profesores(as)y demás miembros de la comunidad académica transiten por el sendero de la escritura académica, compartiendo reflexiones y experiencias de aula, resultados de investigación, cultura, arte u otro tipo de informes que propendan por la formación integral con calidad y el desarrollo del pensamiento crítico.

Andrés Felipe Velásquez Mosquera
Decano, Facultad de Ciencias de la Educación

1. El portafolio: una estrategia de evaluación como promotora de cambio en la concepción del significado de la evaluación

Dicleny Castro Carvajal[1]

Miguel Ernesto Villarraga Rico[2]

Resumen

Una preocupación permanente en el tema de la evaluación educativa ha sido el problema de la evaluación de los aprendizajes, motivo por el cual en el presente artículo se pretende mostrar una estrategia de evaluación que permite que el estudiante se autoevalúe permanentemente a través de unos criterios de autoevaluación que posibilitan un autocontrol y una autorregulación, así como la revisión cercana por parte del profesor. Se muestra un ejemplo de portafolio y un modelo de gestión de acompañamiento de los aprendizajes en el curso de *Optativa Profesional I* en el semestre B del año 2014 y en el semestre A de 2015.

Introducción

En los sistemas educativos de Occidente y en el sistema educativo colombiano en particular, la evaluación se da en cuatro niveles: el sistema educativo en general, los centros escolares o instituciones educativas, el desempeño profesional de los profesores y en el rendimiento de los (las) estudiantes.

A nivel del sistema educativo, en general, la evaluación se da con finalidades políticas y desemboca en directrices curriculares que reorientan las leyes vigentes o generan nuevas. En las instituciones educativas se hace uso de la evaluación para analizar y proponer cuestiones relativas a su organización, medios y recursos disponibles, y funcionamiento logrado con una organización e infraestructura particulares. En el nivel relativo al desempeño profesional de los profesores, la evaluación pretende análisis sobre la labor docente, la formación inicial y la formación permanente; se intenta evaluar la calidad de las actuaciones docentes, sus causas, desempeños y consecuencias. Y en el nivel relativo al rendimiento de los (las) estudiantes, se intenta evaluar una amplia cantidad de elementos que permitan no solamente hablar de la cantidad de conocimientos sino de la calidad de tales conocimientos, construidos por estudiantes de manera particular, así como la capacidad de transferencia de aquellos. Esta evaluación es compleja e interesante.

Cada nivel de evaluación tiene implicaciones en cada uno de los otros, y estos a su vez inciden en cada uno en particular. Como niveles pertenecientes a un sistema no solamente desempeñan funciones y aportan conocimiento individual, sino que realimentan los diversos niveles del sistema provocando sus ajustes, regulaciones y proyecciones (Romberg, 1992; Elliot & Starkins, 1994; Kulm, 1994; Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas [NCTM], 2000), como requisito para alcanzar la calidad de la educación.

El nivel que nos ocupa en el presente documento es el último mencionado y relativo a la evaluación del estudiante, haciendo que él se involucre activamente en el proceso de evaluación. Para tal fin se emplea una estrategia que intenta evaluar una amplia cantidad de elementos que permitan predicar del estudiante cantidad, calidad y transferencia de conocimientos construidos por él como sujeto social autónomo, crítico y dispuesto a incidir en su medio socio-cultural y económico de manera más justa, saliéndonos de la técnica tradicional del examen, algo a lo que tanto peso se le ha concedido, centrándose la atención más en productos que en procesos. Se trata de reconocer otra estrategia o técnica que además tenga en cuenta las actitudes y

1 Profesora de planta del Departamento de Psicopedagogía y del programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima. Licenciada en Matemáticas (Universidad del Tolima), Especialista en Gerencia de Proyectos (IDEAD - Universidad del Tolima) y Magíster en Educación (Universidad del Tolima). e-mail: dcastroc@ut.edu.co

2 Profesor de planta del Departamento de Psicopedagogía y del programa Licenciatura en Matemáticas. Universidad del Tolima. Candidato a Doctor en Educación Matemática de la Universidad de Granada, España. e-mail: mevillar@ut.edu.co

valores, y que facilite un conocimiento continuo y adecuado del progreso del estudiante en su proceso de aprendizaje y en el grado de adquisición de las competencias. La técnica se denomina *el portafolio*.

Sobre la evaluación

Es necesario clarificar lo que se entiende por evaluación, teniendo en cuenta que son diversas las acepciones encontradas para este concepto.

En la cotidianidad

Empezando por el lenguaje cotidiano, en el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (1992) la evaluación se define como la "acción y efecto de evaluar" y, a continuación, se dice que evaluar es "señalar el valor de una cosa. Estimar, apreciar, calcular el valor de una cosa. Estimar los conocimientos, aptitudes y rendimiento de los alumnos" (p. 94). Como sinónimos de evaluar aparecen "Valorar, Valuar, Apreciar, Calcular, Estimar, Tasar y Justipreciar" (Sainz, 1984, p. 276). Valorar es el término compartido por estas dos instituciones para el proceso de evaluación, el cual es ampliamente usado en educación. También Bertoni y Colbs (1997), citados por Serradó, Cardeñoso y Azcárate (2003), consideran que la evaluación está relacionada con significados cercanos a "verificar, medir, valorar, comprender, aprehender, conocer, juzgar, comparar, constatar, apreciar, decir, ayudar, cifrar, interpretar, estimar, experimentar, posicionar, expresar, etc." (p. 108).

En educación

El término evaluación se ha usado durante mucho tiempo asumido como evaluación sumativa, es decir, como una forma de medir el conocimiento adquirido por el estudiante, o como la forma de medir el logro de los objetivos planteados inicialmente para controlar y sancionar el aprendizaje del estudiante. Se trataba de indagar las deficiencias en el conocimiento para clasificarlos. Las técnicas que se utilizan para este tipo de evaluación son las que brindan información sobre los resultados de enseñanza y sobre los resultados de_aprendizaje. Para este tipo de evaluación se emplean instrumentos tales como exámenes finales escritos, exámenes finales orales, pruebas semestrales, exposiciones y pruebas estandarizadas.

Los tiempos evaluativos han ido cambiando los significados y procesos en los últimos años. De hecho, los planteamientos teóricos han logrado constituir un lugar clave al constructo de evaluación (Elliot & Starkins, 1994; Kulm, 1994; Téllez, 1996; NCTM, 2000; Van den Heuvel-Panhuizen & Becker, 2003), entendiéndola como regulación y auto-regulación del proceso continuo de enseñanza y aprendizaje (construcción de significados desde conocimientos previos). Ahora bien, la evaluación es considerada como un proceso holístico, dinámico y multidimensional que debe tener en cuenta tanto lo cognitivo como la motivación y la autoestima (Serradó, Cardeñoso & Azcárate, 2003). Se trata de poner la evaluación al servicio del estudiante, para favorecer su aprendizaje.

En literatura educativa especializada, en particular en la anglosajona, se emplean los términos "evaluation" y "assessment" para referirse a la evaluación. Sin embargo, mientras el primero de los términos se ha usado para referirse a la emisión de un juicio sobre el valor o la calidad de algo (Romberg, 1989), el segundo se ha usado para considerar todos los datos relativos a una persona o situación para emitir un juicio u opinión global y total de la persona o situación (Rico, 1993).

En educación, la evaluación ha pasado por varios periodos descritos por Romberg (1989) de la siguiente manera: a) Primeros exámenes antes del siglo XIX, entre los que destaca exámenes de costumbres, de resistencia o de valor, exámenes orales; estos se aplicaban para juzgar la capacidad de una persona para desempeñar un oficio o actividad determinada, no se hacían de manera masiva. b) Pruebas educativas: uso de exámenes escritos en el siglo XIX; estos se consideraban superiores a los orales e impedían interferencia de los profesores, determinando mejor el grado de aprendizaje de los alumnos; estas pruebas son masivas y comparan unos con otros empleando estadísticas. c) Psicométrico: el lapso que va entre 1900 y 1960 se caracterizó por el diseño y uso de test de inteligencia general, aptitud y rendimiento; se usó masivamente por los avances tecnológicos y permitía comparar individuos. d) Finalmente, están los programas políticos de evaluación: desde 1960 hasta la actualidad se usan los resultados de los logros de los (las) estudiantes para tomar decisiones políticas sobre valoración de programas de formación. En la actualidad se habla de evaluación por competencias, que aunque no la concibió Romberg en su momento, sí complementa un cuadro histórico sintético.

¿Por qué es importante la evaluación en procesos de enseñanza y aprendizaje?

La finalidad de la evaluación como componente del sistema educativo de una institución educativa (de primaria, secundaria o de nivel superior) es la mejora de la educación. Así pues,

"la evaluación es buena sólo si sirve para enriquecer plenamente a las personas que en ella intervienen y para desarrollar los programas e instituciones evaluadas. Es importante además porque una de las funciones pedagógicas es que los evaluados identifiquen y reconozcan las fortalezas de su aprendizaje y lo que aún les falta por lograr; y en cuanto al docente, le sirve para que analice y reflexione acerca de su práctica, a partir de los datos que la evaluación le brinda" (Moreno, 2010, citado por Amigo, p. 71).

La evaluación, asumida de manera formativa, proporciona criterios orientadores para optimizar los aprendizajes. Por esta razón, la evaluación es relevante para "a) comprobar el progreso de los estudiantes en su aprendizaje; b) valorar las estrategias didácticas adoptadas por el profesor y c) valorar el proceso didáctico en su conjunto" (Vallecillas, 2003, p. 95).

Es importante que los (las) estudiantes conozcan desde el comienzo del programa cuáles van a ser los criterios de valoración de trabajos y demás actividades propuestas para el desarrollo del curso. Incluso aquellos(as) deberían colaborar en la construcción y decisión de los criterios de valoración de su trabajo. También se debe hacer énfasis en la autoevaluación, asumida como un juicio crítico fiable sobre el trabajo propio de cada estudiante.

Las finalidades de la evaluación en educación matemática son cuatro, según Webb (1992): 1) que los profesores la utilicen como herramienta para obtener evidencia y retroalimentación sobre lo que los (las) estudiantes conocen y son capaces de hacer en matemáticas; 2) expresar lo que se valora, en relación con lo que los (las) estudiantes deben conocer, hacer o creer, es una forma de comunicación; 3) proporcionar información a los administradores que deben tomar decisiones curriculares y educativas; y 4) aportar información sobre la efectividad del sistema educativo en su totalidad. Para Webb hay coexistencia entre evaluación y enseñanza, estas se refuerzan mutuamente.

Finalmente el NCTM considera la evaluación como "el proceso de obtención de evidencia sobre el conocimiento adquirido por los estudiantes, capacidad para usarlo y disposición hacia su uso, y hacer inferencias a partir de la información recogida para una variedad de propósitos" (NCTM, citado por Serradó, Cardeñoso & Azcárate, 2003, p. 109), idea que se defiende en el NCTM (2000) donde se menciona la función de soportar el aprendizaje y dar información tanto a estudiantes como a profesores, usar instrumentos tecnológicos para examinar tanto los procesos como los resultados para la toma de decisiones pedagógico-didácticas. Esta idea resume el carácter regulador y autorregulador de la evaluación sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, como se anunció antes.

El portafolio

¿Qué es el portafolio?

Si el aprendizaje es concebido como un proceso continuo, el portafolio del estudiante permite observar la evolución de ese proceso. Así, el portafolio es concebido como "una colección de trabajos de los estudiantes guardados como registro" (Gil, 2003, p. 16).

Concebir la evaluación como un proceso que permite la regulación de las diversas actividades en la enseñanza y el aprendizaje implica entender que permite la toma de decisiones sobre alternativas de intervención, a partir de información producto de la evaluación misma, de aportes de los (las) estudiantes y de seguimiento de la alternativa de intervención elegida, y de las consecuencias de su aplicación. Así, resulta ser un proceso regulador, auto-regulador y auto-crítico. En consecuencia, evaluar resulta ser un proceso que requiere de información continua acerca de los procesos de enseñanza y de aprendizaje matemático del estudiante, de sus avances y retrocesos para adecuar las sucesivas intervenciones didácticas.

Serradó, Cardeñoso y Azcárate (2003) consideran que un instrumento que recoge este carácter de la evaluación y que responde a ser continuo, global, diversificado, coherente e integrador es el portafolio. Además, éste permite que el/la estudiante se autoevalúe, lo cual es pertinente curricularmente, como lo afirma Stenhouse (1984): la capacidad de autoevaluarse no es una capacidad intuitiva ni espontánea, se ha de aprender y practicar.

Diversos acercamientos a la noción del portafolio son considerados desde hace algún tiempo. Por ejemplo, como "una colección de documentos que refleja la actuación y productos realizados por el estudiante durante su proceso de aprendizaje dentro y fuera de la escuela" (Margalef, citado por Serradó, Cardeñoso & Azcárate, 2003, p. 111). El portafolio se considera también como una "presentación visual del trabajo, capacidades, puntos fuertes y débiles y progreso del alumno (Fisher & King, citados por Serradó, Cardeñoso & Azcárate, 2003, p. 111). Desde estas perspectivas, en el portafolio se pueden

> integrar una gran variedad de trabajos realizados por el estudiante tanto en clase como en casa. Los documentos que lo configuran son las actividades y trabajos en proceso, los terminados, las reflexiones que han realizado los estudiantes durante el curso, las observaciones y anotaciones del profesor y las posibles modificaciones realizadas por el alumno. En conjunto reflejan los conocimientos, habilidades, nivel de desarrollo y condiciones del hacer del alumno (Serradó & Azcárate, citados por Serradó, Cardeñoso & Azcárate 2003, p. 111).

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, se ha decidido presentar una experiencia en la aplicación del portafolio en el curso de *Optativa Profesional I* de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima, desarrollada entre el semestre B del año 2014 y el semestre A del 2015. En tal experiencia se ilustran los distintos momentos, los instrumentos, las informaciones recabadas, los beneficios para la regulación del trabajo y para que el estudiante se auto-regule, según necesidades en sus espacios y tiempos.

Descripción del portafolio: un ejemplo

En este apartado se presenta el análisis del uso del portafolio con estudiantes del programa Licenciatura en Matemáticas entre los años 2014 y 2015.

Contexto

Los (las) estudiantes de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad del Tolima, entre el semestre B de 2014 y el A de 2015, han tenido la experiencia de elaborar un portafolio con el acompañamiento del docente, para el desarrollo del curso *Optativa Profesional I*. Teniendo en cuenta que son estudiantes de segundo semestre y que el nombre del curso en el que se matriculan no es muy explícito (*Optativa Profesional*) en cuanto a lo que se refiere, se hace necesario ilustrar, describir y poner en evidencia de manera más específica los contenidos, propósitos y evaluación de la materia; el portafolio es una técnica estratégica con la que se puede lograr esto.

Decisiones sobre la elaboración del portafolio

La utilización del portafolio como uno de los instrumentos de evaluación se realiza de una manera planificada, fijando los objetivos a conseguir, así como la determinación del tipo de documentos y tareas que se piensa desarrollar, la forma de organizar y presentar el portafolio. El portafolio se convierte en una evidencia que permite dar testimonio sobre el desarrollo de los procesos de aprendizaje y de enseñanza. El uso del portafolio como estrategia y técnica de evaluación, así como la elaboración del mismo, es una decisión que se toma en el momento de hacer el acuerdo pedagógico entre los (las) estudiantes y el (la) docente.

¿Cuáles actividades se recogen en el portafolio?

Las actividades que allí se tienen en cuenta son creatividad de la carpeta, presentación de la portada, introducción y objetivos del portafolio, documentos, cuestionarios, controles de lectura, mapas conceptuales, mentales, mapa de ideas, glosario de cada una de las lecturas realizadas, consultas, avances de un proyecto con base en la investigación-acción y un ensayo crítico-reflexivo.

Estas actividades permiten que el (la) estudiante desarrolle actividades y tareas que apoyen una primera aproximación, de su parte, a conceptos y aspectos relacionados con la investigación educativa, utilizando específicamente el enfoque de investigación–acción, preparándose a la vez para desarrollar su propia experiencia de indagación en el aula con relación a las matemáticas escolares.

En este sentido, las actividades del portafolio le aportan elementos teóricos y conceptuales, para la reflexión y la crítica constructiva de su formación como profesor indagador de la educación matemática.

Características y evidencias del portafolio del estudiante

3. Criterios de selección y planificación de las actividades que configuran el portafolio:

Actividad	Criterio de evaluación
1. Presentación de la carátula	Creatividad, interés y valor agregado del portafolio.
2. Elaboración de la portada	Identificación del estudiante, curso e institución de acuerdo con la norma ICONTEC.
3. Presentación de la introducción y objetivos del portafolio	El estudiante reconoce el sentido del portafolio para su evaluación y, al describir lo que el portafolio va a registrar o archivar, le permite a su vez reconocer los objetivos y contenidos de la asignatura.
4. Presenta documentos de lectura.	Conocimiento, reflexión y crítica de los contenidos de las lecturas referenciadas en la bibliografía sugerida para el curso de *Optativa profesional I*.
5. Elabora y responde cuestionarios.	Elabora preguntas a partir de las lecturas realizadas y responde otras que propone el autor en cada caso, permitiendo con esto que el (la) estudiante piense de manera crítica, aprenda a tamizar cantidad de información y se prepare para las relatorías o mesas redondas.
6. Presenta controles de lectura.	Fomenta hábitos de lectura, permite que el (la) estudiante comprenda, sintetice, extraiga las ideas más importantes y sea más reflexivo frente a la lectura.
7. Elabora mapas conceptuales, mentales y de ideas.	Capacidad de síntesis, organización y jerarquización de las ideas. Diferencia la estructura de un mapa conceptual de un mapa de ideas y de un mapa mental.
8. Elabora glosario de cada una de las lecturas realizadas.	De cada una de las temáticas desarrolladas elabora un glosario, teniendo en cuenta no sólo las palabras desconocidas sino también las palabras clave de las lecturas realizadas previamente, evidenciadas también en la riqueza de su vocabulario.
9. Realiza consultas adicionales a las lecturas sugeridas por el (la) docente.	Consulta y complementa con otras lecturas, las referencia según las Norma APA y realiza una síntesis de las mismas.
10. Presenta avances y borradores de un proyecto de investigación-acción para el aula de matemáticas.	Elabora un anteproyecto en borrador. Presenta los avances de un proyecto según cada etapa del enfoque de investigación-acción.
11. Elabora un ensayo reflexivo y crítico al finalizar el curso.	Realiza una valoración del curso, del uso de su portafolio y una autoevaluación.
12. Presenta el portafolio según las fechas acordadas previamente.	Presenta el portafolio según las fechas acordadas el día del acuerdo pedagógico y tiene en cuenta las observaciones realizadas por el (la) docente.

Fuente: elaboración propia

4. ¿Cómo elaboran los estudiantes su portafolio?

Se podrán apreciar a continuación algunos ejemplos:

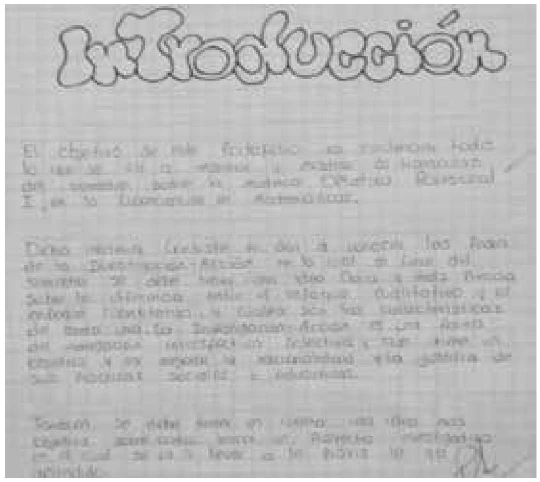
1. La carátula de la carpeta

Fuente: Portafolio de María José Vidales

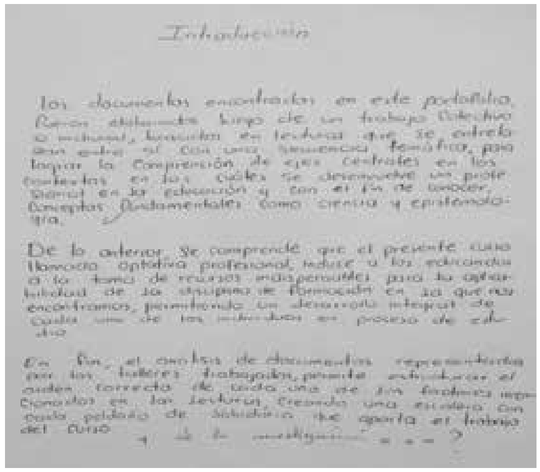
Fuente: Portafolio de Óscar Bohórquez

2. La introducción

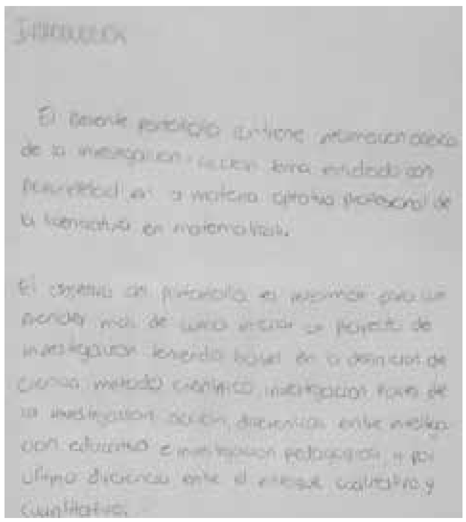
En esta parte los (las) estudiantes expresan sus diferentes perspectivas sobre lo que va a registrarse en su portafolio y cada uno hace énfasis sobre los documentos, las actividades y los objetivos que perseguirá el curso de *Optativa Profesional I* en relación con el enfoque de investigación –acción.



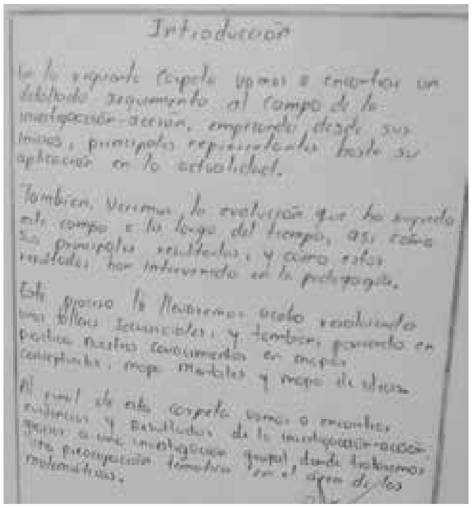
Fuente: Portafolio Paola Moreno Valbuena



Fuente: Portafolio: Laura Hernández

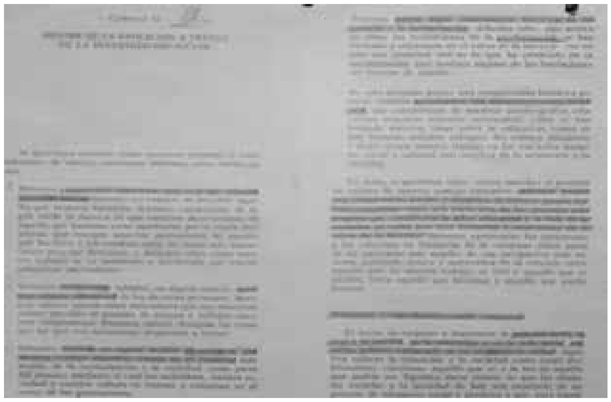


Fuente: Portafolio de María José Vidales


Introducción

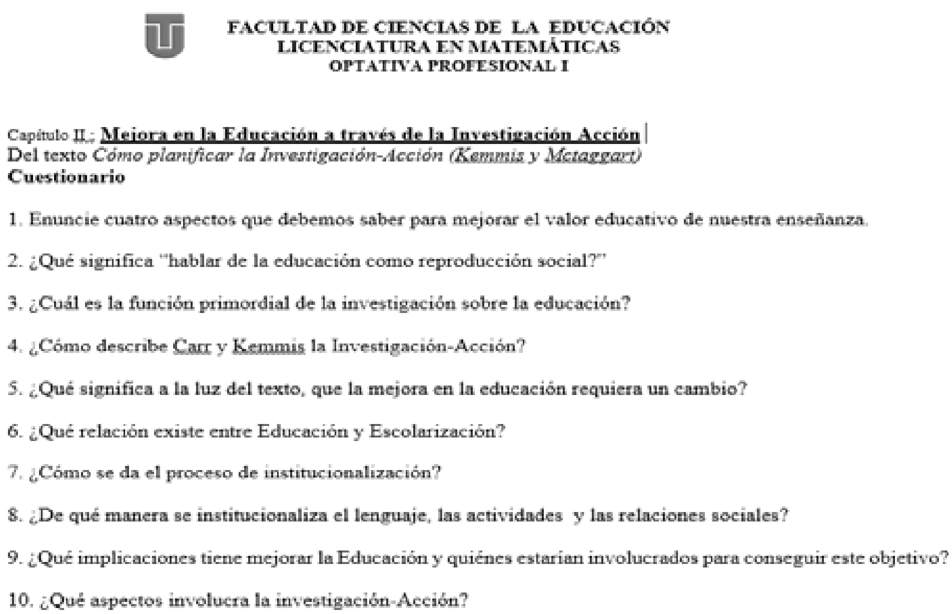
Fuente: Portafolio de Óscar Bohórquez

Documentos de lectura: estos son sugeridos desde el acuerdo pedagógico; sin embargo, el (la) estudiante puede proponer otros autores. Se evidencian materiales fotocopiados, subrayados y resaltados. Se sugieren lecturas de autores como Kemmis y McTaggart (1992), autores del libro *Cómo planificar la Investigación-Acción*.



Fuente: Portafolio de Paola Moreno Valvuena

3. Responde cuestionarios como el que se presenta a continuación. Esto son el insumo para realizar la lectura y participar luego en mesa redonda.

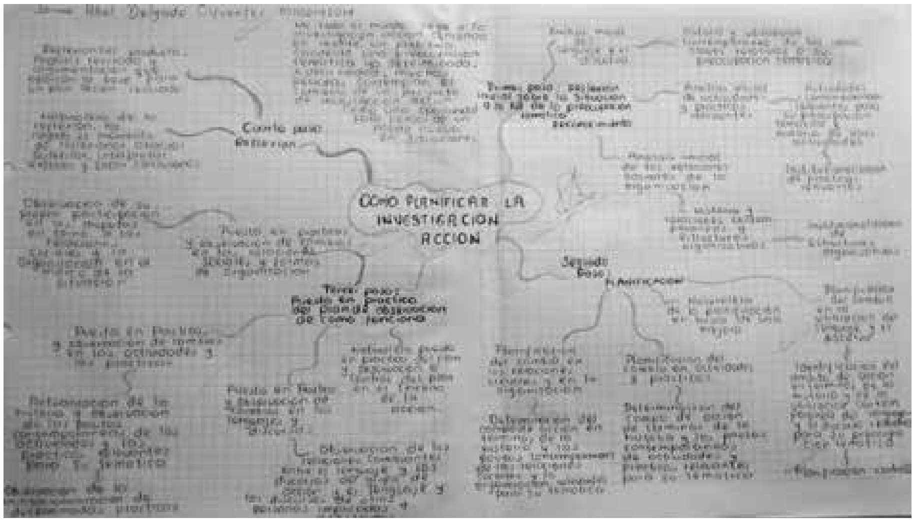

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
OPTATIVA PROFESIONAL I

Capítulo II.: **Mejora en la Educación a través de la Investigación Acción**
Del texto *Cómo planificar la Investigación-Acción (Kemmis y Mctaggart)*
Cuestionario

1. Enuncie cuatro aspectos que debemos saber para mejorar el valor educativo de nuestra enseñanza.
2. ¿Qué significa "hablar de la educación como reproducción social?"
3. ¿Cuál es la función primordial de la investigación sobre la educación?
4. ¿Cómo describe Carr y Kemmis la Investigación-Acción?
5. ¿Qué significa a la luz del texto, que la mejora en la educación requiera un cambio?
6. ¿Qué relación existe entre Educación y Escolarización?
7. ¿Cómo se da el proceso de institucionalización?
8. ¿De qué manera se institucionaliza el lenguaje, las actividades y las relaciones sociales?
9. ¿Qué implicaciones tiene mejorar la Educación y quiénes estarían involucrados para conseguir este objetivo?
10. ¿Qué aspectos involucra la investigación-Acción?

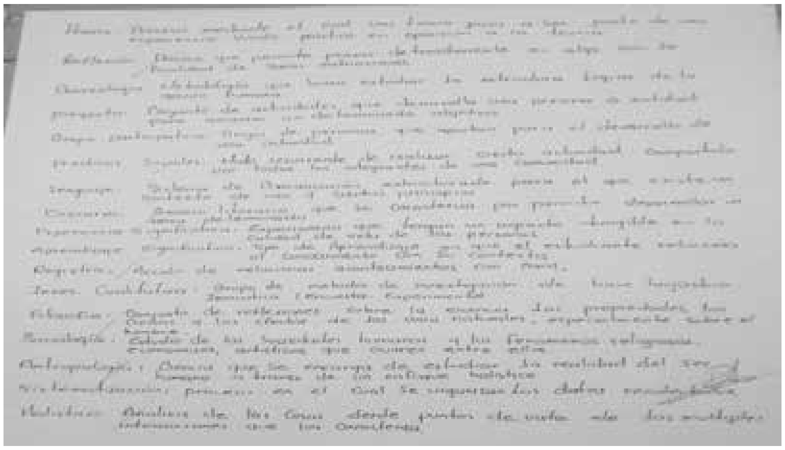
4. Mapas conceptuales, mentales o de ideas

Los (las) estudiantes demuestran capacidad de síntesis, son organizados(as) y creativos(as) en la presentación de sus ideas y las del autor.



Fuente: Portafolio de Jaime Delgado Cifuentes

5 . El Glosario: En algunos casos, el estudinate confunde el glosario con un diccionario, o no se diferencia entre un concepto, una definición o un significado, o se destacan más las palabras desconocidas que las palabras claves de cada texto.



Fuente: Portafolio de Jaime Delgado Cifuentes

Algunas de las notas u observaciones que, en casos específicos, realiza el (la) docente en cada revisión del portafolio son:

- *La respuesta que registra no es suficiente a la pregunta que formula el cuestionario.*
- *Aún faltan documentos por anexar (y se indican cuáles son)*.
- *Respecto a los mapas conceptuales, de ideas y mentales, usualmente se les anota que: faltan ideas importantes del texto que no se tuvieron en cuenta, falta creatividad y orden en la elaboración del mapa.*
- *El glosario no comprende solamente palabras desconocidas, sino también palabras claves o, en otros casos, se les anota que el glosario aún es muy escaso y debe completarlo, o que lo que se sugiere es un glosario y no un diccionario*, entre otras observaciones.

En caso de la no presencia de la actividad o documento, se le sugiere al (a la) estudiante presentar lo faltante en la próxima revisión del portafolio.

El (la) estudiante obtiene una calificación y una retroalimentación en cada revisión del portafolio y, al final del semestre, se revisan y promedian todas para obtener una nota.

Conclusiones, proyecciones y recomendaciones

- ✓ El portafolio es un instrumento muy importante que favorece la evaluación formativa, su uso ha permitido guiar a los (las) estudiantes de manera más próxima en cada una de sus actividades, al tiempo que ellos van percibiendo sus propios progresos.

- ✓ Se ha logrado que el (la) estudiante se preocupe de su proceso de aprendizaje y que no sólo se acostumbre a presentar un producto final, como lo hace la evaluación sumativa.

- ✓ Se ha evidenciado que el (la) estudiante se manifiesta de manera más autónoma, responsable y el portafolio le proporciona buenos hábitos cognitivos y sociales.

- ✓ La retroalimentación que se hace de manera continua surte efectos positivos para el aprendizaje del (de la) estudiante.

- ✓ El mayor inconveniente que se ha tenido con esta experiencia es que demanda tiempo en la revisión de cada uno de los portafolios.

Utilizando esta estrategia de evaluación que, aunque es muy conocida, pocos la usan, se puede reivindicar la reflexión en el sentido de que otras formas, técnicas e instrumentos son posibles para la evaluación. Sin embargo, se siguen utilizando para evaluar a los (las) estudiantes pruebas objetivas y exámenes escritos tradicionales. ¿Por qué limitarnos, cuando hay otras formas de evaluar? Lo que se debe tener en cuenta, como lo afirman Castillo y Cobrerizo (2010), es que sepa optar en cada circunstancia por las técnicas e instrumentos que mejor se adapten a cada realidad educativa y según las características del área curricular.

REFERENCIAS

Amigo, A. (2001). *Evaluación Educativa. Euphoros* (3) 69-96.

Castillo, S. & Cobrerizo, J. (2010). *La evaluación educativa de aprendizajes y competencias*. Pearson. Madrid. 2010.

De Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor.* Barcelona: Labor.

Elliot, J. (2005). *El Cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Morata.

Elliot, G. & Starkins, S. (1994). *Projects Assesment Criteria.* London, England: South Bank University.

Kelly, A. y Lesh, R. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education.* Mahwah, N.J.: Erbaum.

Gil, F. (2003). Una nueva cara para la evaluación en Matemáticas (pp. 9 - 21) En J. M. Cardeñoso, J. L. Lupiañez, A. J. Moreno y M. Peñas (Eds.)*, Investigación en el aula de Matemáticas. La evaluación.* Granada: Universidad de Granada, SAEM "Thales".

Kulm, G. (1994). *Mathematics Assesment.* San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Lewin, K., Sol, T., Stavenhagen,R., Fals-Borda, O., Zamsoc,L., Kemmis, S. y Rahman, A. (1991). *La Investigación-Acción participativa. Inicios y desarrollos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Moreno, T. (2010). *La evaluación de los alumnos en la universidad: un estudio etnográfico*. Pachuca: universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA.: NCTM.

Real Academia Española (1992). *Diccionario de la Lengua Española.* Madrid: Espasa Calpe.

Rico, L. (1993). Mathematics assessment in the Spanish Educational System. En M. Niss (Ed.) *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordretch: Kluwer Academic Publishers.

Rico, L. & Lupiañez, J. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Romberg, T. (1989). Evaluation: a coat of many colours. En D. Robitaille (Ed.), *Evaluation and Assessment in Mathematics Education*. Paris: UNESCO.

Romberg, T. (1992). *Mathematics Assesment and Evaluation. Imperatives for mathematics educators.* New York.: State university of New York Press, Albany.

Sainz, F. (1984). *Ensayo de un diccionario español de sinónimos y antónimos*. Madrid: Aguilar.

Serradó, A., Cardeñoso, J. & Azcárate, P. (2003). La evaluación de capacidades en educación matemática: El portafolio. En J. M. Cardeñoso, J. L. Lupiañez, A. J. Moreno y M. Peñas (Eds*.), Investigación en el aula de Matemáticas. La evaluación.* Granada: Universidad de Granada, SAEM "Thales".

Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del curriculum*. Madrid: Morata.

Tellez, K. (1996). Autentic Assessment. En Sikula (Ed.), *Handbook of research on Teacher Education*. (705-720). New York: Macmillan.

Vallecillos J., A. (2003). El desafío de la evaluación en educación estadística. En J. M. Cardeñoso, J. L. Lupiañez, A. J. Moreno y M. Peñas (Eds*.)*, *Investigación en el aula de Matemáticas. La evaluación.* Granada: Universidad de Granada, SAEM "Thales".

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Bercker, J. (2003). Towards a didactic Model for Assessment Design in Mathematics Education. En A. Bishop et. Al.: *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordretch: Kluwer.

Webb, N. (1992). Assessment of Students´ Kwnoledge of Mathematics: Steps toward a Theory. En D. Grouws (Eds.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan.

2. Uma investigação em geometria na escola básica com o geogebra[1]

Hiago Portella De Portella[2]
José Carlos Pinto Leivas[3]

Introdução

A possibilidade de utilizar tecnologias computacionais pela escola, como ferramentas de apoio didático, oportuniza o preparo dos alunos para enfrentar as transformações ocorridas na sociedade e, sendo a escola um espaço de formação para todas as pessoas, a forma de explorá-las incorporando-as ao seu universo faz do seu uso no processo educativo um instrumento para garantir melhor aprendizagem pelos alunos.

Conforme Kenski (2007, p. 101) "As tecnologias são oportunidades aproveitadas pela escola para impulsionar a educação, de acordo com as necessidades sociais de cada época". Como instrumentos pedagógicos auxiliares ao ensino, em especial na área da educação, estão disponíveis vários programas computacionais, entre eles, os softwares de Geometria Dinâmica, os quais permitem a interação e a experimentação de conteúdos, intuitivamente e com agilidade, que podem promover a transformação da ação educativa.

Nesse sentido, propomos a utilização do software Geogebra como ferramenta de apoio pedagógico por meio da resolução de atividades de Geometria Euclidiana e Não Euclidiana, na disciplina de Matemática, numa escola de educação básica no Brasil, como parte de um Projeto de Iniciação Científica Junior.

O referido projeto é vinculado ao Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, sob orientação do professor Doutor José Carlos Pinto Leivas, coordenado na escola pelo primeiro autor e financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul-FAPERGS.

O projeto

A atividade aqui apresentada foi proposta a alunos dos anos finais do ensino fundamental, da Escola Municipal de Ensino Fundamental Élio Salles, em Júlio de Castilhos e realizada no laboratório de informática.

Para desenvolver o projeto foi escolhido o software Geogebra, o qual favorece a descoberta intuitiva de conceitos e propriedades geométricas, testar teoremas e proposições e resolver exercícios, os quais permitem responder questionamentos baseados nas imagens produzidas.

No decorrer do projeto foram apresentadas atividades de Geometria Euclidiana e Não Euclidianas divididas em blocos contendo 10 a 12 atividades cada. No Bloco 1 foram resolvidos exercícios para familiarizar os alunos com o software. No Bloco II foram relacionadas dez atividades, com o objetivo de retomar e aprofundar conceitos de Geometria Euclidiana estudados no ensino fundamental. O uso de linguagem formal e a disposição de instruções por meio das atividades propostas envolveram os alunos na familiarização com as ferramentas do Geogebra para produzir figuras e conceitos geométricos.

Ainda, no Bloco II, foi realizada uma pesquisa bibliográfica em livros didáticos da escola sobre os seguintes conceitos geométricos: circunferência, círculo, tangente, secante, potência de ponto em relação à circunferência, ângulo e esfera. Nos blocos seguintes foram investigadas propriedades de Geometrias Não Euclidianas. Apresentamos, neste artigo, uma atividade do Bloco II com a

1 Projeto de Pesquisa financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul- Brasil.

2 Aluno do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática da UNIFRA (Brasil). e-mail: hiagoportella@yahoo.com.br

3 Prof. Dr. do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da UNIFRA. Centro Universitário Franciscano de Santa Maria (Brasil). e-mail: leivasjc@unifra.br ; leivasjc@yahoo.com.br

finalidade de analisar como os alunos utilizam o software Geogebra para estudar Geometria.

Conforme Gerônimo et. al (2010), o software Geogebra substitui satisfatoriamente o caderno de desenho geométrico, permite o traçado de retas, de ângulos, de circunferências, etc. possibilita a modificação das construções sem a perda dos vínculos geométricos e proporciona uma grande quantidade de experimentações pelo usuário.

De acordo com André e Lüdke (1986), essa atividade caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, pois o ambiente escolar é a fonte direta de dados e o pesquisador o seu principal instrumento, através do contato direto e prolongado com a situação investigada. É pela ação do pesquisador que o conhecimento irá se desenvolver, relacionando fatos e dados de pesquisa e estabelecendo novas evidencias ao longo do trabalho.

Desenvolvimento

Apresentamos aos alunos a atividade a seguir, a qual, após a leitura em grupo, foi desenvolvida com o objetivo de traçar uma reta *t*, paralela a uma reta *r*, sendo ambas perpendiculares a uma reta *s*, por meio de construções geométricas usufruindo do dinamismo proporcionado pelo software Geogebra. Destacamos que a atividade proporciona aos alunos conhecer os seus comandos e, principalmente, retomar e apropriar-se de novos conceitos de Geometria.

A atividade foi realizada em duas partes, sendo que na primeira construímos a reta perpendicular *r* e na segunda a reta paralela *t*, conforme segue.

<u>1ª parte:</u> Utilizando as ferramentas do software Geogebra, crie uma reta *r* que passa por dois pontos A e B. Marque um ponto C não pertencente à *r*.

Construir a reta s perpendicular à r, passando por C. Para isso, trace uma circunferência de centro C tal que intercepte *r* em dois pontos. A seguir, tome a ferramenta "circulo definido pelo centro e um de seus pontos", clique em C e depois em um ponto D fora de *r*, de maneira que a circunferência intercepte *r* em dois pontos. Marque esses pontos E e F de interseção utilizando a ferramenta "interseção de dois objetos".

Trace uma circunferência de centro E que passa por *c*. Depois, uma circunferência de centro F que passe por C. Essas duas últimas circunferências traçadas encontram-se num ponto G diferente de C. Marque-o.

Desta forma, podemos traçar a reta *s*, a qual é perpendicular a *r*.

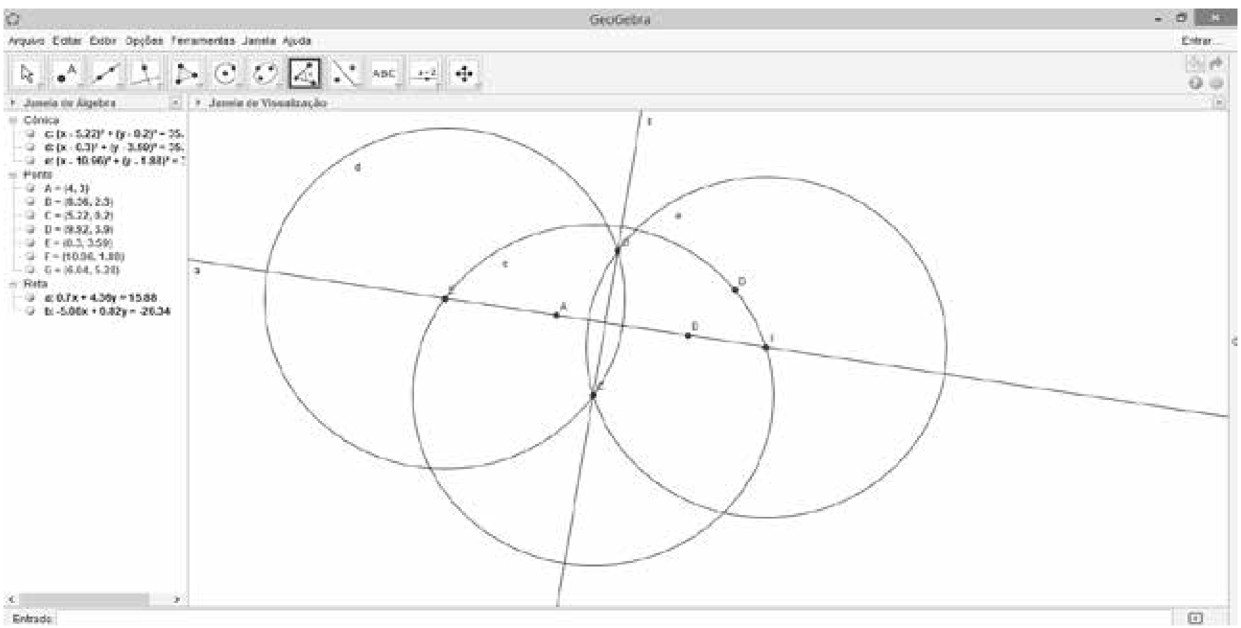


Figura 1: construção própria.

Análise dos primeiros resultados

Ao analisar a construção do aluno A, figura 2, observamos que o mesmo cumpriu as orientações fornecidas para a atividade, mas não a interpretou corretamente, ao traçar a reta *t*, perpendicular a *r*, passando pelo ponto A. Conforme a figura 2, o aluno usou o comando do Geogebra para traçar retas perpendiculares, o que o levou a um erro na construção, ou seja, na resolução da questão. A perpendicular deveria ser construída na interseção das circunferências de centro E e F.

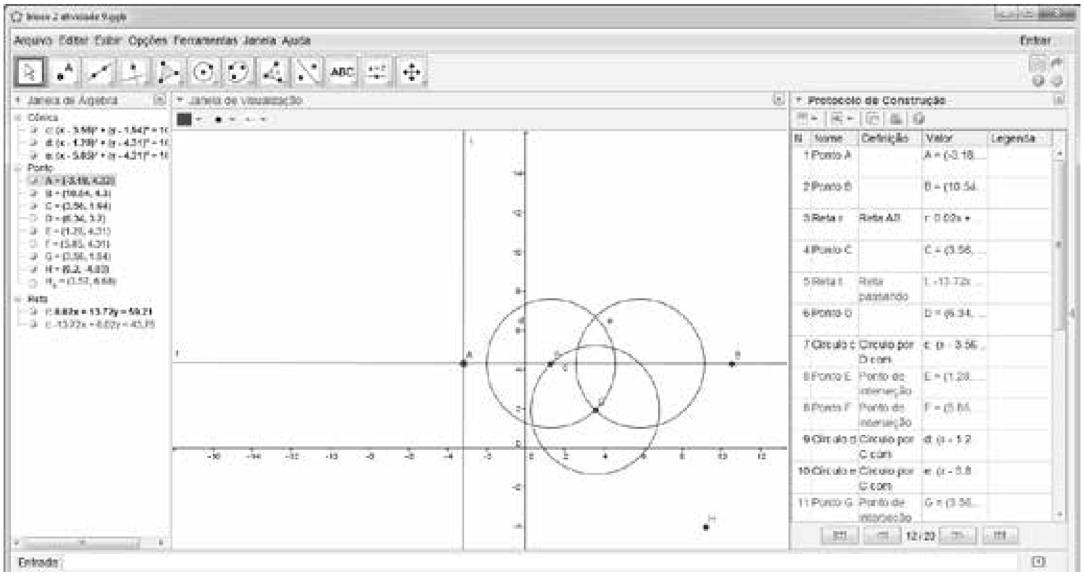


Figura 2. Construção do aluno A.

Nas construções do aluno B (figura 3) e do aluno C (figura 4) observamos que ambos seguiram as orientações propostas. Contudo, também não as interpretaram corretamente como o aluno A, pois ambos fizeram a leitura literal do texto, e não compreenderam que a frase “construção da reta perpendicular a *s*, passando por C” é um subtítulo da atividade e não uma instrução e utilizaram a ferramenta do software para construir a reta perpendicular a *r*. Porém, no caso dos alunos B e C, a reta *s* foi traçada de acordo com as construções geométricas, ou seja, perpendicular a *r*, passado pelo ponto C e na intersecção das circunferências de centro E e F.

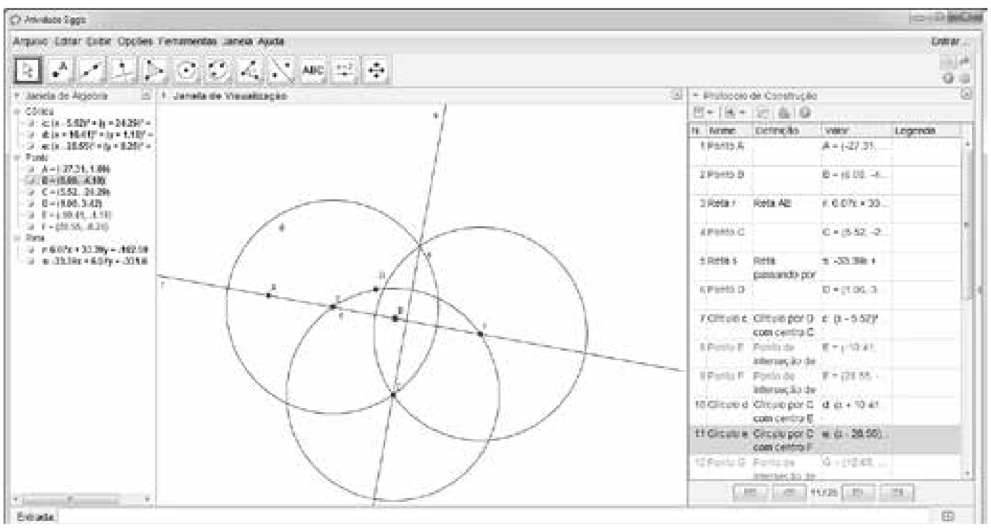


Figura 3. Construção do aluno B

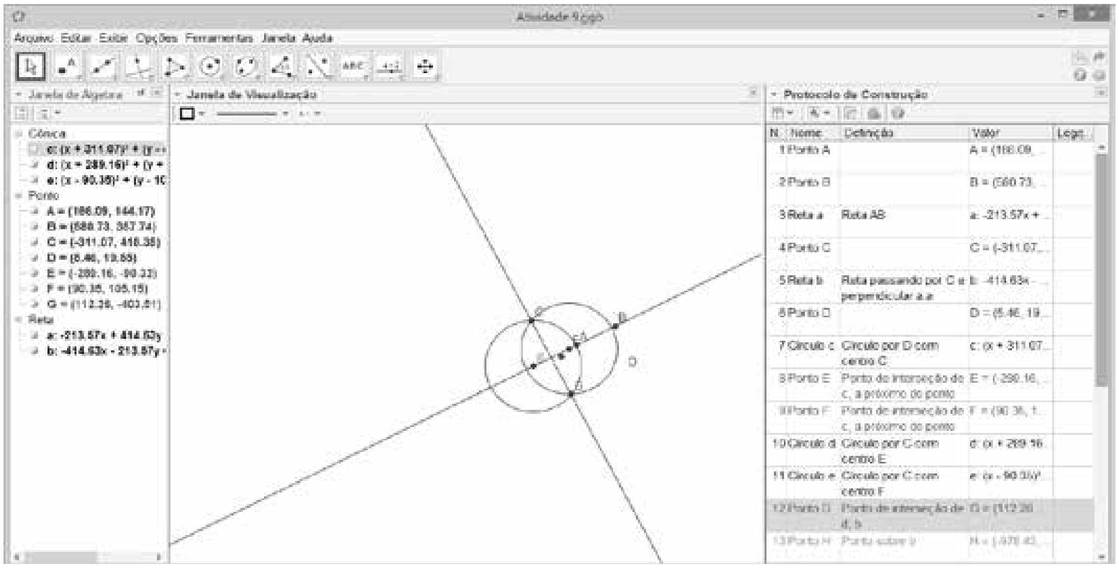


Figura 4. Construção do aluno C

<u>2ª parte:</u> Na sequência, seguimos com a construção da reta perpendicular a *s*, passando por C.

Trace uma circunferência de centro C tal que intercepte *s* em dois pontos. Para isso, use a ferramenta "circulo definido pelo centro e um de seus pontos", clique em C e depois em um ponto H, fora de *s* e de *r*, de maneira que a circunferência intercepte *s* em dois pontos. Marque esses pontos I e J de interseção.

Trace uma circunferência de centro I que passe por J e, após, uma circunferência de centro J que passe por I. Essas duas circunferências se interceptam em dois pontos, K e L. Represente a reta perpendicular a *s* que passa por K e L. Nomeie-a *t*. Mude a cor de *t* para vermelho e altere sua espessura para 3. Desse modo, por construção, a reta *t* é paralela à *r*.

Esconda toda a construção, deixando visíveis somente as retas *r*, *s* e *t* e os pontos A, B e C. Tome a ferramenta "reta paralela" e trace uma paralela à reta *r*, passando por C. Por padrão, o Geogebra desenha uma reta paralela à *r* na cor preta. Ela ocupa a mesma posição de *t*?

Mova o ponto A para posições bem distintas da inicial. O que ocorre com "as paralelas": elas permanecem ocupando o mesmo local do plano?

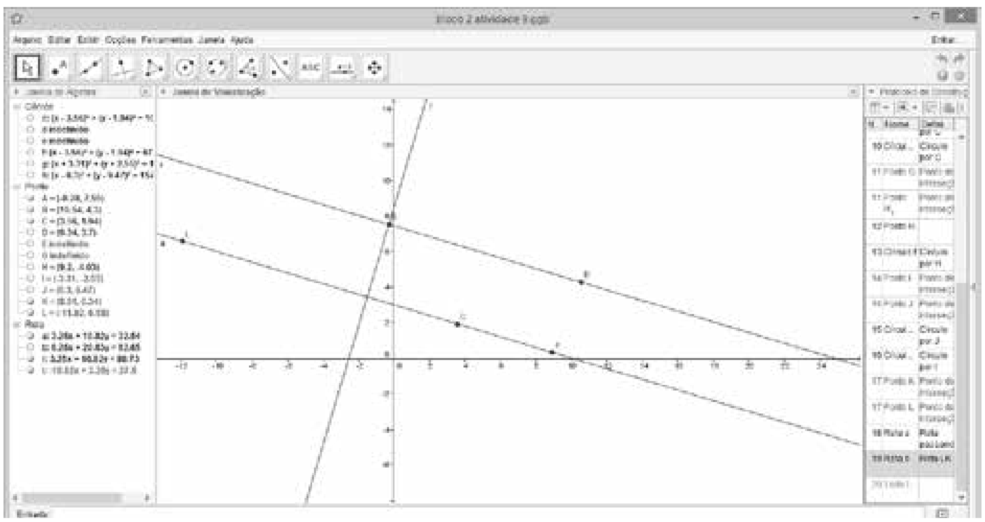


Figura 5. Construção do aluno A.

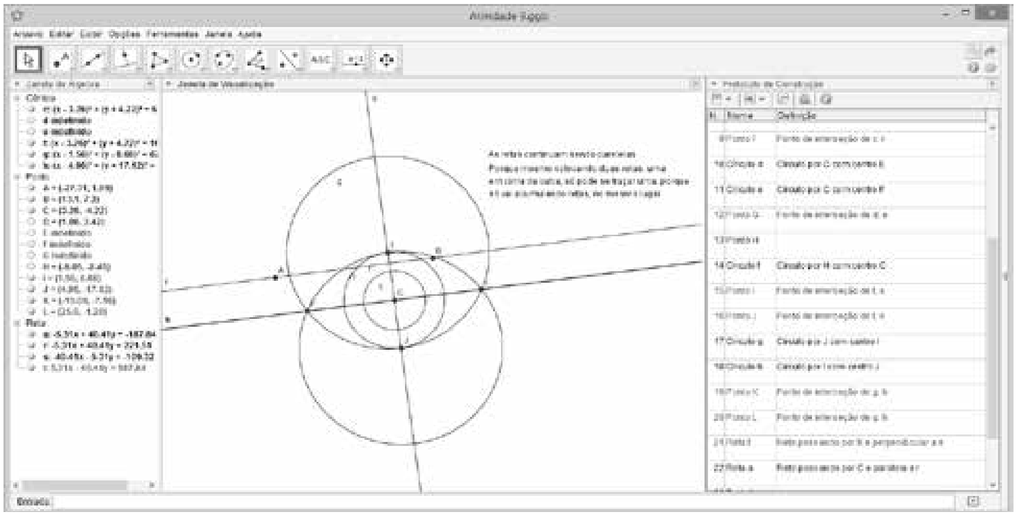


Figura 6. Construção do aluno B.

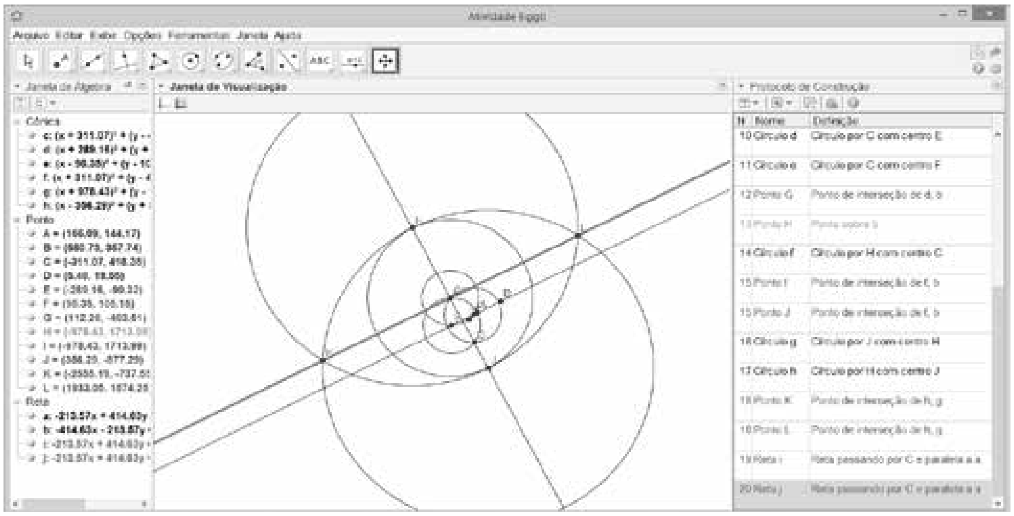


Figura 6. Construção do aluno C.

Ao analisar a atividade finalizada percebemos que os alunos construiram a reta *t* paralela à reta *r;* conforme indicado, apesar do equívoco inicial na interpretação da atividade. Observamos que ambos seguiram as orientações na segunda parte do exercício, construindo as circunferências cuja intersecção resulta na reta paralela procurada. Ainda, verificamos que os alunos inseriram alguns pontos a mais e que algumas notações não correspondem ao enunciado no exercício, contudo isso não alterou o resultado final e demonstrou um crescimento em relação à primeira parte realizada em que não houve compreensão do problema por falta de cuidado e interpretação no que fora solicitado.

Com isso, confirmamos que o dinamismo do software possibilita a construção geométrica permitindo que os alunos visualizem suas construções e proporciona ao professor perceber como elas foram desenvolvidas, passo a passo, satisfazendo os objetivos iniciais.

Conclusões

Procuramos mostrar no artigo uma pequena possibilidade de utilizar o Geogebra na construção inicial de conceitos de Geometria Euclidiana plana em um projeto de iniciação científica com três alunos das séries finais do Ensino Fundamental, os quais ainda não haviam cursado os conteúdos de Geometria nesse nível de escolaridade. O objetivo das questões aqui descritas e analisadas rapidamente era preparar os estudantes quanto ao uso da tecnologia bem como descobrir, de forma intuitiva, conceitos que seriam utilizados posteriormente na construção do modelo de Poincaré para a Geometria Hiperbólica.

Podemos concluir, da rápida descrição, que a atividade é relevante e pode ser utilizada por professores da escola básica para desenvolver conteúdo de Geometria Euclidiana e, principalmente, indicar a habilidade de interpretação do problema que o professor pode e deve desenvolver com seus alunos a fim de que alcance sucesso. Por outro lado, o software se mostrou incentivador para que os alunos se envolvessem no processo de resolução de problemas e uma ferramenta importante para se obter êxito nessa habilidade como foi indicado.

REFERÊNCIAS

André, M. & Lüdke, M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Gerônimo, J. Barros, R. & Franco, V. (2010). *Geometria Euclidiana plana: um estudo com o software Geogebra*. Maringá: Eduem.

Kenski, V. (2007). *Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação*. Campinas: Papirus.

3. Programa de disciplina positiva (PDP)

Juan Gabriel Rodríguez Ramírez[1]

Resumen

Desde la promulgación de la Ley 1620 de 2013, el Gobierno Nacional emprendió un camino hacia la convivencia pacífica, creó el Sistema Nacional de Convivencia Escolar, tema muy controversial puesto que para muchos la ley responsabiliza a las instituciones educativas de los hechos de violencia escolar. En el 2014 el Gobierno publicó la Guía 49, documento pedagógico orientador sobre modificaciones al Manual de Convivencia y proyectos de convivencia escolar. El programa de disciplina positiva (PDP) se encuentra enmarcado en este proceso, por lo que se trabajará en torno al porqué de su formulación. ¿Cuál es su significado?, ¿qué implica? y ¿qué paradigmas de cultura busca transformar?, son interrogantes que se abordarán. Igualmente se reflexionará acerca de la cultura de la violencia y la cultura de la paz, en aras de conocer las formas, las maneras y las prácticas que los (las) docentes, estudiantes, administrativos y padres de familia deben desarticular y configurar para promover una convivencia pacífica de los ciudadanos en ejercicio y de los que vienen en formación.

Palabras clave: Disciplina positiva, disciplina punitiva, manual de convivencia, convivencia escolar, normas.

Los sistemas disciplinarios

Cuando se habla de sistemas disciplinarios (SD) debe mencionarse lo que hoy se denomina el Manual de Convivencia Escolar, conocido anteriormente como Reglamento Estudiantil y Código Disciplinario. Más allá de los documentos, es necesario fijar el enfoque en las normas y actores, las normas que regulan a los actores en sus relaciones de convivencia. Entre los actores están los (las) estudiantes, docentes, padres de familia y administrativos en general.

Producto de concebir los SD como mecanismo de poder para que la institución educativa obligue a los (las) estudiantes a cumplir normas escolares se han degenerado las prácticas de la convivencia escolar y el ejercicio de las normas. Esto se inscribe dentro de lo que se reconoce como violencia cultural (Galtung, 1990), entendida como aquella forma de violencia que incluye los aspectos de la cultura, esfera simbólica de nuestra existencia -ejemplificada por la religión, la ideología, el lenguaje y el arte, la ciencia empírica y ciencias formales (lógica y matemáticas)- que pueden ser utilizados para justificar o legitimar la violencia (pp. 291-305).

Como bien se sabe, cada institución de educación tiene sus propias normas, insignias, valores y/o principios institucionales, determina un debido proceso en caso de incumplimiento de las normas y procedimientos a ejercer. Todo esto se halla consignado en cada manual de convivencia, el cual no es garantía de una convivencia pacífica. El conjunto de SD puede clasificarse en *sistemas de disciplina punitiva* y *sistemas de disciplina positiva*. Esta clasificación se plantea no tanto porque varíen los documentos de los Manuales de Convivencia, sino porque varían las formas y las prácticas culturales que, desde uno u otro, los actores vivencian en las cotidianidades de la vida escolar.

Caracterización de la disciplina punitiva positiva

La disciplina positiva es una respuesta a las experiencias propias de la vida escolar y del ejercicio de la autoridad desde la disciplina punitiva. En este caso. Se hará referencia a la disciplina punitiva como primigenia de la disciplina positiva, no porque la una dependa de la otra sino porque en el proceso la una hizo necesaria a la otra. Pero, ¿qué significa disciplina punitiva?, ¿qué características presenta?, ¿por qué recibió este nombre o rotulación?

1 Licenciado en Matemáticas de la Universidad del Tolima. Especialista en Gerencia de Instituciones Educativas (IDEAD, Cali, Universidad del Tolima) y Magíster en Resolución de Conflictos y Mediación de la Universidad Internacional Ibaroamericana (UNINI). e -mail: jundes@gmail.com, jrodriguezr@unicatolica.edu.co

La disciplina punitiva positiva

Por disciplina se pueden comprender muchas apreciaciones positivas o negativas. Es válida esta aclaración porque la disciplina puede ser entendida como adiestramiento y/o conducta sugestiva en los procesos de aprendizaje, por lo que se esperan comportamientos repetitivos y sumisos; por otro lado, se esperan comportamientos interesados o dependientes del premio o castigo. Por ejemplo, en el Colegio Nuestra Señora del Rosario (CNSR, 2014) se define la disciplina como el grado de autorregulación y autodeterminación en la búsqueda de una auténtica realización personal y social. La disciplina, en cuanto un proceso, es conducente a la autoridad derivada del sistema, y se conjuga con las normas sociales consensuadas en el logro de la autonomía, contempla los referentes internos de conciencia, así como los referentes externos expresados en deberes, compromisos y consecuencias educativas (p. 32).

En esta definición se observa una comprensión menos controladora o determinista, pero también se busca apoyar la realización personal por medio del aprendizaje respecto de los deberes propios de los (las) estudiantes.

Apoyados en la comprensión de disciplina, conviene mirar ahora la disciplina punitiva. La palabra *punitivo* es definida por la Real Academia Española como un "adjetivo perteneciente o relativo al castigo. Justicia punitiva" (RAE, 2012, p.v). Con este acotamiento se puede ver que los orígenes de la disciplina punitiva están ligados a la justicia punitiva en relación con las consecuencias carcelarias de los sistemas gubernamentales de justicia de hechos punibles[2]. La doctora Torres de Luna define la disciplina punitiva en lo siguientes términos:

> (alude a) la aplicación de un estímulo doloroso inmediatamente después de la emisión de un comportamiento inadecuado, tales como: el insulto, la humillación, la agresión física al niño, los regaños y la crítica. Sin tener en cuenta el daño físico y emocional que sufre el niño (Torres, 2013, p. 32).

Por otro lado, se halla la disciplina positiva. Al hacer un paralelo con las investigaciones para la paz, donde ésta y sus prácticas se logran solo después de conocer los horrores de la violencia y la guerra, la disciplina positiva también surge como respuesta o alternativa a la disciplina punitiva o negativa, sin confundir su existencia práctica empírica. Ésta se reconoce, conceptualiza y trabaja con investigadores como Dreikurs y Adler en 1920, quienes muestran el enfoque de crianza *democrática* que busca abogar por el buen trato de los niños, basándose en el respeto mutuo entre padres e hijos en los procesos de crianza que los avoca, cuidando que los niños tengan límites sanos, que no sean ni sobreprotegidos ni desprotegidos. Estos extremos causan los problemas de comportamiento (citados por Graham, 2011). Tras los avances en los estudios, la disciplina positiva o democrática se puede definir como alternativa a la tradicional disciplina punitiva, a sus procesos, principios y enfoques que resultan fuertes en la medida de conservar el carácter educativo y de desarrollo de la autonomía moral, vivenciándose en la construcción y/o definición de las normas y las consecuencias educativas, contrario a lo que acontece con la disciplina punitiva.

Diferencias entre disciplina punitiva y positiva

Como hemos mostrado las definiciones de disciplina punitiva y positiva son bastante divergentes, miremos algunas características y diferencias entre la disciplina punitiva o negativa y disciplina positiva respectivamente

2 Además de lesionar bienes jurídicos particulares, atenta contra los valores ético-sociales predominantes en una sociedad determinada. El grado de culpabilidad, por su parte, involucra consideraciones acerca de la intencionalidad del hecho (Velásquez, 2000).

Figura 1. Disciplina negativa punitiva (EDIBA, 2012)

En el recuadro anterior se observa la forma como un sistema de disciplina punitiva entiende una mala conducta como persona problemática, busca el culpable e inmediatamente las sanciones, las cuales se concentran en la persona mas no en los hechos. Por tal razón, se determinan malas calificaciones, exclusiones (suspensiones) y quejas a los padres, algo que causa que el (la) estudiante se siente apocado(a), temeroso(a), enojadizo(a), desestimado(a), despreciado(a), golpeado(a) y emerjan sentimientos de represión e imposición por el trato y los rótulos que le son asignados(as) en una situación que es atendida desde un enfoque sancionador o castigador. Lo anterior genera un proceso muy frío y externo que responde a fines emergentes, que coinciden con el entendimiento de lo punitivo en relación con el castigo como principal característica. En este sentido conviene retomar el cuestionamiento hecho por Jane Nelsen: *"¿De dónde sacamos la idea absurda de que, para que los niños mejoren, primero hay que hacerlos sentirse mal?" (Jelsen, citada por Graham, 2011, p. 1).*

Figura 2. Disciplina positiva (EDIBA, 2012)

Por otro lado, producto del buen trato se puede hablar de la disciplina positiva, en la que una mala conducta es entendida como un problema de la persona. En este momento hay una concentración en el problema: se consideran causas, se aprende autocontrol, se busca destacar logros y conductas, se proponen metas y canalización de energía, se busca el consenso y las consecuencias educativas proporcionadas por el diálogo y las actividades de razonar se tornan en actividades reparadoras, los (las) estudiantes se identifican con participación, reflexión, autonomía y un clima general de armonía y estímulo. En fin, resulta una actividad proyectiva que planifica acciones e interiorizaciones, una afirmación válida para sintetizar consiste en ser duros con el problema y más flexibles con la personas.

Estructura, formalización y procesos

Para comprender un poco más lo que es el programa consideremos estos otros elementos comparativos.

DISCIPLINA PUNITIVA	DISCIPLINA POSITIVA
Regulación externa centrada en el refuerzo negativo o positivo.	Autorregulación.
Normas impuestas.	Normas consensuadas.
La autoridad deriva de la posición de superioridad jerárquica del profesorado.	La autoridad deriva del sistema.
Castigo (refuerzo negativo).	Consecuencias educativas.
Cuadro 1 - Consideraciones previas (Fundación Universitaria Iberoamericana [FUNIBER], 2013)	

La práctica de la disciplina positiva busca la autorregulación, la construcción de normas consensuadas, la autoridad del sistema y sus pares, y, por último, las consecuencias educativas que se logran como aprendizaje e interiorización reflexiva sobre el incumplimiento de normas consensuadas. La disciplina punitiva se observa en relación con la regulación externa, las normas impuestas, la autoridad por nivel jerárquico de docentes independientemente de sus decisiones asertivas o erráticas, sin olvidar el castigo del que se ha hablado ya varias veces.

Según la Fundación Universitaria Iberoamericana (FUNIBER, 2013), el programa de disciplina positiva se caracteriza por: a) tener un fundamento eminentemente educativo; b) basarse en valores como la participación, el diálogo y el consenso; c) acoger las normas consensuadas como normas aceptadas; d) asumir las consecuencias de incumplimiento de carácter educativo, las consecuencias educativas; e) reivindicar la comprensibilidad, aceptabilidad y apoyo hacia el estudiante, teniendo la oportunidad de participar activamente en la elaboración y revisión o seguimiento de las normas.

De los elementos mencionados falta abordar explícitamente las normas consensuadas, las consecuencias educativas y el proceso de elaboración, revisión y/o seguimiento de las normas en la institución educativa.

El deber ser de las normas y las consecuencias educativas

Las normas tienen unos criterios de claridad, efectividad, respeto por la persona y de convocación; esto significa que antes de mirar cómo es la construcción de las normas del Manual de Convivencia y los pactos de clase, conviene observar qué criterios mínimos se deben cumplir. Por esto, las normas deben tener varias características que a continuación se mencionan.

Primeramente, las normas debes presentarse en un número reducido, para que sean fáciles de recordar y aplicar; deben ser explícitas, para que todos los (las) estudiantes conozcan cuál es el comportamiento esperado; deben ser unívocas, concretas y fácilmente comprensibles, para que todos(as) conozcan su sentido, su razón de ser; las normas también deben ser relativas a las conductas que interfieren en la convivencia escolar y en la misión educativa de la institución; deben poseer consecuencias proporcionales de la conducta regulada; deben ser enunciadas en positivo, es decir que deben propender por expresar el comportamiento correcto en una determinada situación, en lugar de expresar una prohibición; también deben ser coherentes con normas generales, de rango superior o institucional, en concordancia con los derechos de la comunidad educativa.

Estos criterios deben ser trabajados por todos los miembros de la comunidad educativa puesto que los (las) estudiantes son quienes más disciernen las normas que les aplicarán, que autorregularán y dinamizarán sus actividades y comportamiento. Por otro lado, en correspondencia con las normas, es necesario enunciar los criterios deben tener las consecuencias educativas, puesto que estas deben ser

- ✓ Realistas y factibles.
- ✓ Conocidas por todos.
- ✓ Aplicadas consistentemente.
- ✓ Deben guardar proporción con la gravedad de la falta cometida.
- ✓ Las consecuencias de incumplir la norma deben ser de carácter educativo y no punitivo.
- ✓ Siempre que resulte posible, deben ir orientadas a corregir el problema, en relación lógica con el tipo de falta cometida.
- ✓ Deben ser eficaces a la hora de corregir el comportamiento inadecuado.
- ✓ No pueden ir en contra de los derechos fundamentales.
- ✓ Cada norma puede llevar varias sanciones graduadas, en función de la magnitud del daño causado o pensando en la reincidencia.

Construcción de las normas consensuadas

El proceso de construcción de las normas es vivencial y la participación democrática se convierte en la metodología de trabajo. Por tal motivo, no existe un único camino pero sí debe decirse que desde la *Teoría de la democracia* se hallan bases para preparar a los ciudadanos para ejercer la democracia participativa[3]

A continuación se presentan los siguientes pasos (FUNIBER, 2013) a seguir en el proceso de construcción de las normas consensuadas:

1) Estudio de la normativa implícita y explícita existente, buscando responder a interrogantes como: ¿Qué normas tenemos? ¿Todos la conocen? ¿Cómo se crearon? ¿Qué sanciones o consecuencias implican? ¿Se cumplen? Si no se cumple, ¿por qué?

2) Sensibilización-concienciación desde cada clase en aras de reflexionar sobre la importancia y la necesidad de las normas en los grupos sociales, con preguntas orientadoras como: ¿Por qué necesitamos normas en el colegio? ¿Cómo sería el colegio sin normas? ¿Para qué son las normas? ¿Pueden ser las normas promotoras de la diferencia?

3) Análisis de problemas mediante debates sobre actitudes y conductas que causan problemas, clasificación de problemas, discernimiento de derechos y deberes, propuestas de normas de los estudiantes desde estos y otros análisis.

4) Consenso de la normatividad. En este paso se discuten y, por consenso, se eligen las normas más importantes y necesarias, se debaten y discuten las consecuencias de las normas establecidas, se colocan las normas de modo visible (por ejemplo, en un mural elaborado por los y las estudiantes), se hacen ejercicios de lluvia de ideas sobre quien es la autoridad que aplicará las consecuencias educativas

5) Puesta en práctica: conservando el respeto mutuo deben aplicarse las normas sistemática y oportunamente cuando se presentan situaciones, deben tomarse registros y, si es posible, realizar la presentación de descargos.

3 La *Teoría de la democracia* es complementaria de la democracia liberal o electoral, puesto que fomenta la participación como mecanismo para contrapesar el poder de los gobernantes, sumando intereses y voces que definen propósitos comunes, juicio político y acción mutua, aprendiendo así a vivir en comunidad y generando un mayor autogobierno de los ciudadanos (Baños, 2006).

6) Revisión-seguimiento del funcionamiento de la nueva normativa: debe medirse el cumplimiento, las dificultadas y, desde estos datos, proponer redefinición de las prácticas o normas, debe vivenciarse la auto-observación, la autoevaluación y los procesos de dirección de grupo.

El programa de disciplina positiva es pues un camino hacia una convivencia pacífica, en la que los (las) docentes juegan un rol ejemplificador y la autorregulación es el fin último de los procesos normativos, mostrando la disciplina como el límite interior de nuestras pasiones desde el respeto mutuo.

REFERENCIAS

Baños, J. (Junio de 2006). Teorías de la democracia: Debates actuales. *Andamios, Volumen 2*(Número 4), pag. 35-58. Obtenido de http://www.insumisos.com/lecturasinsumisas/Teorias%20de%20la%20democracias.pdf

CNSR (8 de Julio de 2014). *http://www.colrosariocali.edu.co.* (C. N. Cali, Ed.) Obtenido de http://www.colrosariocali.edu.co/images/pdf/Manual%20de%20convivencia%202014%20-%202015.pdf

EDIBA (09 de Mayo de 2012). Disciplina positiva en la escuela. *Dificultades de APRENDIZAJE*(9), 4. Obtenido de http://club.ediba.com/esp/disciplina-positiva-en-la-escuela/

FUNIBER (2013). *Teoría del Conflicto I. Concepto y análisis del conflicto.* Bogota: Fundación Universitaria Iberoamericana.

Galtung, J. (Agosto de 1990). Cultural Violence. *Journal of Peace Research*, 291-305. doi:10.1177/0022343390027003005

Graham, G. (4 de Marzo de 2011). *¿Qué es la disciplina positiva?* Obtenido de crianzapositiva.org: http://crianzapositiva.org/2011/03/que-es-la-disciplina-positiva/

Real Academia Española [RAE]. (2012)., 22.a edición. Obtenido de rae.es: http://lema.rae.es/drae/?val=punitivo

Torres, E. (2013). Modificando la conducta de nuestros hijos aplicando disciplina positiva. *Disciplina positiva skinner.* Corporación Skinner. Obtenido de http://myslide.es/documents/disciplina-positiva-skinner.html

Velásquez, V. (2000). La teoría de la conducta punible en el nuevo Código Penal. (pág. 15 SS). Bogota: Nuevo Foro Penal. Obtenido de https://www.unifr.ch/ddp1/derechopenal/articulos/a_20080527_31.pdf

4. Caracterización de los tipos de tareas en los instrumentos escritos de evaluación en la clase de Matemáticas: un estudio en la Educación Básica

Johanna Montejo Rozo[1]
Edwar Fabián Panqueba Moreno[2]

Introducción

A partir del trabajo realizado en el Semillero de Investigación denominado *Problemáticas de la Evaluación Matemática Escolar* (DMA – UPN)[3], se han detectado ciertas particularidades en relación con los tipos de tareas que se proponen en los instrumentos de evaluación. A continuación se presentan los hallazgos de un estudio cuyo objetivo es caracterizar los tipos de tareas que se proponen en instrumentos escritos, las ventajas y desventajas de su uso.

Planteamiento del problema

Al revisar los parámetros a partir de los cuales está basada la educación colombiana en Matemáticas (véase para ello los *Lineamientos Curriculares* y los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* del Ministerio de Educación Nacional, de 1998 y 2006 respectivamente), es posible establecer que, desde la enseñanza de las Matemáticas, es necesario generar en los estudiantes capacidades como intuir, razonar, comunicar y resolver problemas. Sin embargo, el desarrollo de este tipo de competencias comporta cierto grado de dificultad debido a que, por lo general, o en la mayoría de los casos, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se rige por el denominado *paradigma del ejercicio* (Skovsmose, 2000), el cual consiste en la asignación de ejercicios rutinarios que pretenden la ejecución de determinados algoritmos. Esta situación incide sobre la propuesta de instrumentos de evaluación en la clase de matemáticas. Por lo tanto, vale la pena preguntarse si, en la realidad actual de la evaluación de las matemáticas escolares, los instrumentos escritos de evaluación se rigen aún por este paradigma. De esta manera, el objetivo de este estudio consiste en analizar qué tipos de tareas se emplean habitualmente en los instrumentos escritos de evaluación y generar una postura reflexiva en relación con su uso, de tal forma que se lleve a cabo una invitación a utilizar nuevos tipos de tareas en los mismos.

Los tipos de tareas y sus características

De acuerdo con Ponte (2004), es posible formular ciertos tipos de tareas: ejercicios, problemas, exploraciones, investigaciones. La caracterización de cada una de ellas se realiza en función de sus dimensiones: grado de apertura, grado de dificultad, duración y contexto.

El grado de dificultad es una dimensión que varía entre dos extremos: "lo accesible" y "lo difícil"; por este motivo, es una dimensión relativa, que depende de cada estudiante y su relación con el contenido matemático. El grado de *apertura* es una dimensión que se utiliza para determinar el tipo de cuestiones que se incorporan dentro de la situación, y esta varía entre los extremos "abierto" y "cerrado". Para distinguir entre abierto y *cerrado*, es menester recordar que una tarea es *cerrada* si se expresa con claridad lo que se da y lo que se pide, y una tarea *abierta* es aquella compuesta por un grado de indeterminación significativo en lo que se da, en lo que se pide, o en ambas cosas.

Otras dos dimensiones que permiten definir los tipos de tareas son la *duración* y el *contexto*. En relación con la *duración*, resolver una tarea matemática puede durar unos minutos, días, semanas o incluso meses, es decir, puede ser de larga o corta duración.

1 * Licenciada en Matemáticas y Magíster en Docencia de la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional. e-mail: jemontejor@pedagogica.edu.co

2 ** Estudiante de Licenciatura en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. e-mail: dma_epanqueba127@pedagogica.edu.co

3 Semillero de investigación perteneciente al Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, años 2014 y 2015.

Finalmente, el *contexto* constituye una dimensión que puede variar entre lo *real*, lo *semirreal* y lo puramente *matemático*, (Skovsmose, 2000). Los *contextos reales* se refieren a la realidad en la cual se desenvuelve el estudiante, los *contextos semirreales*, son aquellos que se construyen artificialmente y no tienen una relación directa con la realidad del estudiante, o el *contexto de las matemáticas puras*, que se propone desde el marco conceptual de las matemáticas y en términos netamente matemáticos.

Una vez definidas las dimensiones de las tareas, se definirán los *tipos de tareas*. Un *ejercicio* es una tarea de corta duración, por lo general accesible, de contexto matemático y de naturaleza cerrada. Un *problema* es una tarea cerrada que tiene mediana o larga duración, el contexto de éste puede ser real, semirreal o matemático, pero se diferencia de los ejercicios en que siempre presenta cierta dificultad al estudiante; de lo contrario, se trata de un planteamiento que puede resolverse fácilmente, dejando de ser un problema para convertirse en un *ejercicio*.

Otros tipos de tareas propuestos por Ponte (2004) son las *tareas de exploración* y las *tareas investigativas.* Las *tareas de exploración* se caracterizan por ser abiertas, su duración es mediana o larga, puede estar en cualquiera de los contextos y su dificultad es accesible, puesto que el estudiante puede iniciar con el desarrollo de la tarea a partir de su enunciado, sin verse en la necesidad de planificar estrategias para encontrar una solución. Tareas de este tipo podrían ser el hallazgo de regularidades a partir de la observación de determinados patrones en una secuencia de figuras. Las *tareas de investigación* se caracterizan por dejar pendiente algún tipo de trabajo al estudiante, ya sea la elaboración de una estrategia para la solución, o la formulación específica del interrogante a resolver, su duración es larga e involucran un grado de participación por parte del estudiante mucho más amplio que en los demás tipos de tareas. Esto se da ya que, por ejemplo, el estudiante debe recurrir a elementos que hacen parte de su realidad, con el objeto de dar solución a la tarea planteada.

Metodología

La población objeto de estudio correspondió a los estudiantes del grado 11º del Colegio Distrital San Francisco, ubicado en la ciudad de Bogotá D.C. Inicialmente, se visitó la institución educativa, con el objetivo de recoger las *fuentes documentales* que permitían observar y evidenciar el tipo de tareas que se plantean en los instrumentos de evaluación en la clase de matemáticas (en particular, exámenes y pruebas escritas) para su posterior análisis. Se realizaron entrevistas semi estructuradas a la profesora del curso y a los estudiantes.

Análisis de la información

Al revisar las *pruebas escritas*, se encuentra que están compuestas en su mayoría por *ejercicios*, de acuerdo con la clasificación de Ponte (2004), como es el caso de la siguiente tarea:

Resolver: $3x + \frac{1}{4} \leq \frac{2}{3} - \frac{3}{4}x$

Como se observa, la anterior tarea corresponde a tipo *ejercicio*, debido a que es una tarea *cerrada*, en tanto hay claridad respecto a lo que se da:

$$3x + \frac{1}{4} \leq \frac{2}{3} - \frac{3}{4}x$$

y respecto a lo que se pide: determinar el intervalo que satisfaga la desigualdad dada. El planteamiento de tareas cerradas en las pruebas escritas es considerado por la profesora titular del curso como un elemento que facilita su trabajo; además, se refleja una *concepción epistemológica absolutista* de las matemáticas, en tanto considera que son una ciencia que incluye verdades absolutas, exactas e infalibles (Ernest, 1991):

Entrevistador: ¿Por qué emplea usted tareas de única respuesta en las pruebas escritas?

Profesora: En primer lugar por la exactitud de las matemáticas, y en segundo lugar porque la labor de la calificación se hace más fácil cuando las tareas que se proponen son de única respuesta.

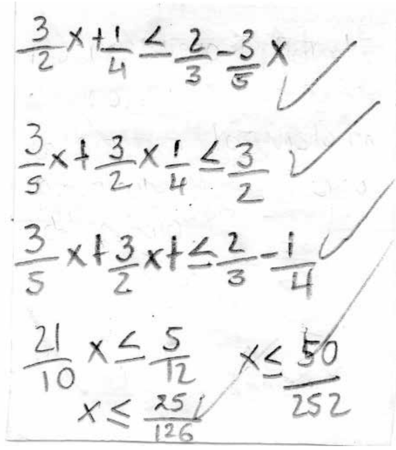
Continuando con el análisis de la tarea propuesta en la prueba escrita, al observar el desarrollo de este ejercicio durante la clase, se evidenció que la *duración* es corta, por su condición de tarea incluida en una prueba escrita. Sin embargo, algunos estudiantes tardaron más en resolverla.

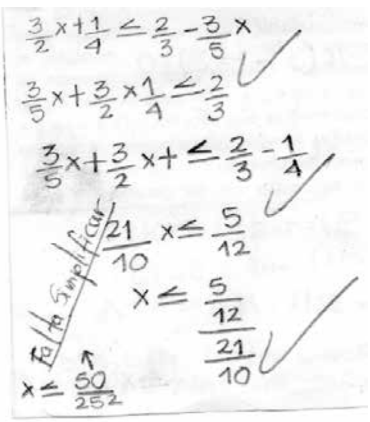
La profesora titular del curso asegura además que, dentro de las pruebas escritas, no incluye tareas tipo investigación (proyectos), debido a que en dichos instrumentos las tareas deben ser de corta duración, tal como se observa en el siguiente fragmento de la entrevista a la profesora:

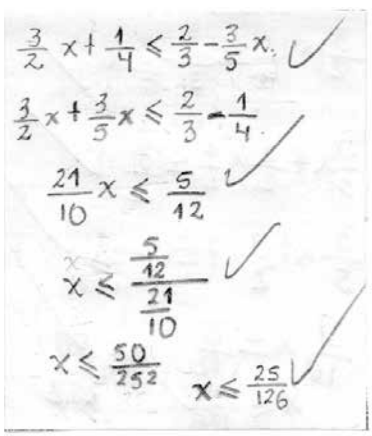
Entrevistador: ¿Plantea usted tareas en los instrumentos de evaluación en los cuales el estudiante deba explorar, conjeturar?

Profesora: Sí, en los instrumentos de evaluación propongo una o dos tareas (pero no siempre) en las cuales el estudiante deba explorar o conjeturar. No lo hago para todas las evaluaciones, porque estas tareas requieren de bastante tiempo para ser desarrolladas, y las evaluaciones se deben planear para ser resueltas en 30 o 45 minutos.

Respecto al *grado de dificultad*, es posible mencionar que la tarea en cuestión fue "fácil" de resolver para la mayoría de estudiantes, puesto que en la entrevista manifestaron que solamente debían aplicar el algoritmo o procedimiento dado a conocer por la profesora en la clase. Las siguientes imágenes dan cuenta de esta situación:







Como *ventajas* del planteamiento de tareas tipo ejercicio en los instrumentos escritos de evaluación, es necesario mencionar que éstos se constituyen en un mecanismo que permite ejercitar procedimientos y algoritmos (Ponte, 2004), lo cual es reconocido por la profesora titular:

Entrevistador: ¿Qué se entiende por ejercicio?

Profesora: Los ejercicios son tareas que se proponen a los estudiantes con el fin de que adquieran habilidad y agilidad en la aplicación de un procedimiento matemático.

Otra posible ventaja que comporta el uso de este tipo de tareas en la clase de matemáticas y, en particular, en los instrumentos escritos de evaluación, es que la acción de corregir estas tareas (posterior al momento de la aplicación de las pruebas), permite que los (las) estudiantes reconozcan sus errores y den solución a sus inquietudes. Lo anterior se observa en el siguiente fragmento de la entrevista a la profesora:

Entrevistador: ¿Considera usted que las tareas que propone en las pruebas escritas contribuirán al aprendizaje de los estudiantes?

Profesora: La evaluación contribuye al aprendizaje de los estudiantes, en el sentido de que cuando se hace la corrección de la prueba escrita, se retoman los temas que debieron servir como herramientas para resolver las cuestiones planteadas, además de que permite a los estudiantes visibilizar los errores cometidos, para que sean conscientes de ellos y traten de no volver a repetirlos en una próxima oportunidad.

Finalmente, se mencionan las *desventajas* de proponer tareas tipo ejercicio en los instrumentos de evaluación:

Entrevistador: ¿Cuáles son las desventajas de incluir tareas tipo ejercicio en los instrumentos escritos de evaluación?

Profesora: No desarrolla habilidades matemáticas ni otras competencias propias del área, debido a que son tareas de carácter repetitivo… se repiten procedimientos y no permiten que el estudiante realice un análisis profundo. [Los ejercicios] tampoco permiten que el estudiante reflexione sobre lo que está haciendo.

Como se observa, la profesora titular reconoce que este tipo de tareas desconocen el desarrollo de otras habilidades que hacen parte de la actividad matemática de los estudiantes, según las directrices curriculares actuales (MEN, 1998): modelación matemática, comunicación, planteamiento y resolución de problemas.

Conclusiones

Este estudio permite evidenciar que, por lo general, en las pruebas escritas se utilizan tareas tipo *ejercicio,* debido a la *comodidad* que genera el hecho de constituirse en tareas cerradas (Ponte, 2004) a la hora de calificar, y debido a la corta duración que por lo general comporta este tipo de tareas. Sin embargo, vale la pena preguntarse si el *grado de apertura* y la *duración* de una tarea son las únicas dimensiones que el profesor debe tener en cuenta para el planteamiento de tareas en los instrumentos escritos de evaluación. Si bien las tareas tipo *ejercicio* permiten reforzar la habilidad de ejercitación de procedimientos (MEN, 1998), tienen como desventaja no desarrollar otras habilidades que hacen parte de la actividad matemática de los (las) estudiantes.

A partir de lo anterior, surge el interrogante: ¿existe la posibilidad de replantear el diseño de los instrumentos escritos de evaluación, de tal manera que involucren diversos tipos de tareas (no solamente ejercicios), con el ánimo de desarrollar otras habilidades matemáticas? Naturalmente, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) presentan una serie de tareas que están en concordancia con la propuesta de Ponte (2004) de *problemas*, *exploraciones* e *investigaciones* para el desarrollo de los procesos generales y de los conocimientos básicos (pensamientos). En este sentido, ¿qué condiciones se necesitan para garantizar que se dé lugar al uso de otro tipo de tareas para evaluar a los estudiantes en la clase de Matemáticas?

REFERENCIAS

Ernest, P. (1991). *The philosophy of Mathematics Education*. Exter U. K: Taylor & Francis Group.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos, & J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática, 6*(1), 3-

5. La letra como número generalizado: algunos errores de estudiantes de grado noveno

William Eduardo Naranjo Triana[1]

Resumen

Esta ponencia tiene como objetivo mostrar los resultados obtenidos en la aplicación de unas actividades cuya finalidad es caracterizar los errores y las dificultades evidenciadas por estudiantes de grado noveno al usar letras para representar números generalizados en contextos de resolución de problemas. Para llevar a cabo este proyecto se realizó una actividad escrita a treinta y cuatro estudiantes, además de la aplicación de algunas entrevistas clínicas. Principalmente se encontró que existe una gran dificultad en los estudiantes al usar y asignarle significado a las letras en el álgebra escolar, lo cual se debe en gran medida a las prácticas tradicionalistas de una enseñanza sin sentido y significado desarrollada por los profesores de matemáticas en la escuela, en los niveles de básica primaria y básica secundaria. Por otro lado, este trabajo es el resultado final de una experiencia educativa y se constituye como posible respuesta a problemas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje del álgebra escolar.

Introducción

Los resultados de las pruebas nacionales (específicamente las pruebas SABER de 2009) y las comparaciones internacionales del desempeño de estudiantes del nivel escolar en Matemáticas (véase por ejemplo las pruebas del *Programme for International Student Assessment* de 2006 y la evaluación del *Trends in International Mathematics and Science Study* de 2007) señalan que una gran proporción de los estudiantes colombianos de los grados 7º, 8º y 9° muestran índices muy bajos de comprensión conceptual del álgebra escolar (Agudelo-Valderrama, 2002). El pensamiento algebraico constituye el centro principal del quehacer matemático (Mason, Graham, Pimm & Gowar, 1999) y posibilita una actividad típica de éste: expresar generalidad. Por estas y otras razones resulta relevante hacer un profundo análisis acerca de las dificultades en el aprendizaje del álgebra, específicamente en el uso de las letras. En este trabajo se mostrará algunas dificultades y errores evidenciados por estudiantes de grado 9° (que tienen entre 13 y 15 años de edad) al usar letras para representar números generalizados en contextos de resolución de problemas.

Metodología

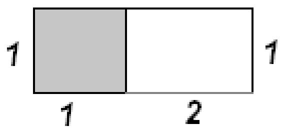
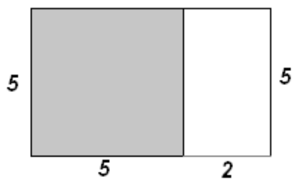
Para llevar a cabo este proyecto, en primera medida, se desarrolló una actividad con los estudiantes en donde el objetivo principal era construir la representación algebraica de una función cuadrática a partir de una situación problémica, utilizando la representación tabular e identificando regularidades dentro de la misma. La actividad que se llevó a cabo es la siguiente:

Actividad. ***Situación problema:*** *un albañil desea pañetar una pared rectangular como la que se muestra en la siguiente imagen, de tal manera que la figura sombreada sea un cuadrado, el borde rojo debe medir exactamente dos (2) metros y mantenerse fijo durante todo el proceso.*

¿Cuánto mide el área de toda la pared (lo sombreado y lo no sombreado) si la longitud del lado de la figura sombreada es: cero metros, un metro, dos metros, tres metros, cuatro metros, cinco metros?

Organice los datos en la siguiente tabla:

1 Estudiante de X semestre de la Licenciatura en Matemáticas. Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad del Tolima. e-mail: william-105@hotmail.com

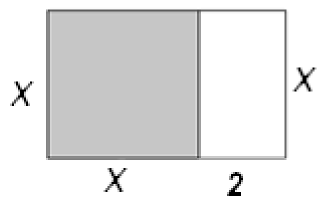
PARED	LONGITUD DEL LADO DEL CUADRADO	PROCEDIMIENTO	ÁREA DE LA PARED
	0 METROS	**(0).(0) +(2).(0)**	**0 METROS CUADRADOS**
	**1 METRO**	**(1).(1) + 2(1)**	**3 METROS CUADRADOS**
…	…	…	…
	**5 METROS**	**(5).(5) + 2(5)**	**35 METROS CUADRADOS**

Nota: esta tabla es un ejemplo de los registros que deben hacer los estudiantes, los espacios se le presentan en blanco y ellos mismos deben realizar sus propios procedimientos.

Fíjese muy bien en la columna de los procedimientos y responda las siguientes preguntas:

- ✓ ***¿Qué varía de un procedimiento al otro? ¿Qué permanece fijo o constante de un procedimiento al otro?***
- ✓ Con tus propias palabras, describe el método o procedimiento que llevas a cabo para hallar el área total de la pared, es decir, ¿cómo haces para hallar el área de la pared?
- ✓ ***¿Cómo se hallaría el área de la pared para cualquier longitud del lado del cuadrado?***

Sugerencia: represente la longitud del lado del cuadrado con una letra, por ejemplo "X":

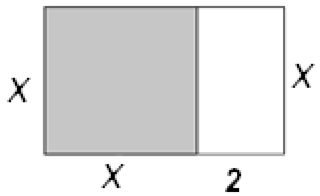


- ✓ Escriba una expresión algebraica que represente el área de total de la pared para cualquier longitud del cuadrado.

Para finalizar la actividad, los estudiantes debían representar en el plano cartesiano los datos obtenidos en la tabla, y luego tabular para valores positivos y negativos la función cuadrática obtenida anteriormente.

Luego de esto se realizó una pregunta dirigida a todos los (las) estudiantes, de acuerdo con la siguiente figura:

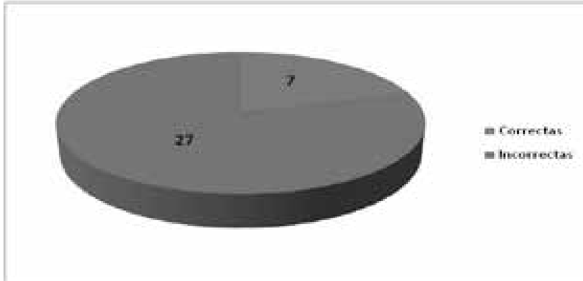
¿A qué es igual la base del rectángulo? ¿Cuánto mide la base de este rectángulo? Justifique su respuesta.



Las respuestas dadas por los (las) estudiantes a esta pregunta fueron muy variadas, aún más las justificaciones presentadas por ellos; para organizar estos datos se clasificaron de acuerdo con la naturaleza de la respuesta dada y, para poder entender un poco más acerca de lo que piensan los estudiantes cuando dan sus justificaciones, se decidió realizar dos (2) entrevistas clínicas intencionales, a dos casos que presentaban características muy particulares.

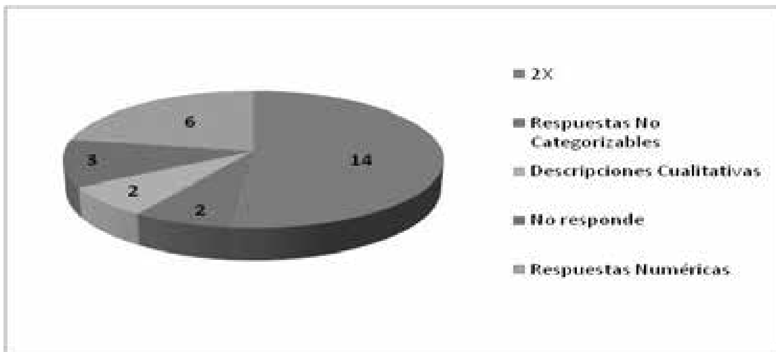
Los resultados obtenidos de la última pregunta hecha a los (las) estudiantes fueron los siguientes:

Tipo de Respuesta	N° de Estudiantes	Porcentaje
Correctas	7	20,58 %
Incorrectas	27	79,42 %
TOTAL	**34**	



Los 27 estudiantes que dieron una respuesta incorrecta o incompleta fueron clasificados en las siguientes categorías, de acuerdo con las características similares que presentaron entre sí, como se muestra en la siguiente tabla:

Tipo de Respuesta	N° de Estudiantes	Porcentaje
2X	14	41,18%
Respuestas No Categorizables	2	5,88%
Descripciones Cualitativas	2	5,88%
No responde	3	8,82%
Respuestas Numéricas	6	17,65%
TOTAL	**27**	



Respuesta “2x”

En esta categoría los (las) estudiantes responden que la base del rectángulo mide “2X” y dan distintas justificaciones que se pueden agrupar en las siguientes sub- categorías:

- ✓ Responden que la base mide X+2 y que esto a su vez es igual a “2X”, es decir, tienen la necesidad de dar una respuesta simplificada o un sólo término.
- ✓ Responden que la base mide “2X” y no justifican su respuesta, posiblemente conciban las letras como objetos que se pueden coleccionar o juntar.
- ✓ Responden que la base mide “2X”, justificando que “X” y “2” no se pueden sumar y, por lo tanto, la base mide “2X”.

Respuesta “numéricas”

En esta categoría se ubicaron aquellas respuestas que correspondían a un número en particular, con procedimientos y justificaciones que se pudieron clasificar en las siguientes subcategorías.

- ✓ Reemplazan la letra por un número en particular (es decir, letra evaluada) y realizan el respectivo procedimiento (e.g, X+2 = 3, reemplazando la letra por 1).
- ✓ Ignoran la letra; por ejemplo la base del rectángulo mide 2, haciendo caso omiso a la letra.
- ✓ Ignoran el número 2 y reemplazan la letra por el número 1.

Al analizar las justificaciones dadas por algunos (as) estudiantes, se pudo observar que existe la tendencia a reemplazar la letra por el número 1 ya que este es su coeficiente, es decir, evalúan la letra de acuerdo con el coeficiente de ésta.

Descripciones cualitativas

En esta categoría se ubicaron aquellas respuestas que describen cualitativamente la forma como varía la base de todo el rectángulo en relación con la base del cuadrado, pero no son capaces de declararlo en símbolos , como se puede observar en los siguientes ejemplos:

“*la base de la figura varía de acuerdo con la base del cuadrado”; “La base mide cualquier número porque de ahí se guían para los demás valores”.*

Respuestas no categorizables

En esta categoría se ubicaron aquellas respuestas cuyos errores no provenían de las concepciones erradas acerca de la letra, sino que eran producto de la falta de comprensión de la pregunta, la desatención de los (las) estudiantes, los errores aritméticos (por ejemplo, para hallar la base del rectángulo se debe multiplicar); en otras palabras, son errores que no provienen de las distintas interpretaciones de las letras, sino de otros factores que para este trabajo no resultan de tanta importancia.

No responde

En esta categoría se ubicaron los (las) estudiantes a quienes no les interesaba la actividad y, por lo tanto, no respondieron a la pregunta hecha acerca de la base del rectángulo.

Entrevistas

Con el fin de obtener una mejor comprensión de algunas respuestas dadas por los (las) estudiantes para poder caracterizar los errores y las dificultades evidenciadas por ellos, se realizaron tres entrevistas clínicas (intencionales) a algunos casos que presentaban características muy particulares. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Respuestas fundadas en el dilema “proceso-producto”

Al entrevistar algunos(as) estudiantes, es posible inferir que estos(as) tienen una gran dificultad para aceptar respuestas que no sean números o términos simplificados. A esto Matz y Davis (citados por Pretexto) lo llamaron el dilema “proceso-producto” (1996, p. 25), el cual debe ser superado para dar paso a lo que Collis (citado por Pretexto) denomina “Aceptación de la falta de cierre” (1996, p. 25).

Declaraciones como las siguientes (extraídas de las entrevistas hechas a algunos estudiantes. Véase anexo 1), dan cuenta que los (las) estudiantes entrevistados(as) presentan dificultades con el uso de las letras, posiblemente porque aún no aceptan que la respuesta a un problema de matemáticas sea distinto a un número o a una expresión simplificada; por lo tanto, inventan reglas y manipulaciones erróneas, muchas veces fundadas desde su trabajo aritmético escolar para poder dar una respuesta que se acomode a las concepciones que tienen acerca de lo que debe ser una respuesta bien dada:

Nota: Las declaraciones del entrevistador se identifican por la letra "E" y las del estudiante por la letra "A".

Caso número 1

E: Si yo le digo a usted que la respuesta a la pregunta ¿cuánto mide la base? es x+2; ¿cuánto mide la base de ese rectángulo? Yo digo que x+2 podría ser (o no ser) la respuesta.

A: Sí

1: Porque podría ser

A: Porque uno puede dejar la incógnita a la persona va calificar el trabajo o algo así, o sea es una forma de hallar la verdadera respuesta

E: Sí es una forma de hallar la base sumar x+2

E: Pero, entonces esta es la respuesta a cuánto mide la base

A: Pues en parte sí, por que si yo digo x+2 me va a dar la respuesta

E: Pero entonces, ¿qué faltaría?

A: La respuesta

E: ¿Cuál sería la respuesta?

A: 2x

Caso número 2

E: Si yo le digo a usted que la respuesta a la pregunta ¿cuánto mide la base? es x+2? Y yo digo x+2, ¿podría ser esta la respuesta o no podría ser?

E: O, ¿tiene que ser un sólo elemento, un sólo término?

A: Yo creo que tiene que ser un sólo elemento.

E: ¿Por qué?

A: Porque pues está pidiendo un número como tal, o sea cuánto mide la base, no podríamos decir.

E: O sea [que] cuando yo pregunto cuánto, ¿estoy preguntando por un número?

A: Sí

E: Ok, eso es cierto, o sea que ésta no sería la respuesta (dice mientras señala con el dedo la expresión x+2), porque ésta no es un sólo número

Caso número 3

E: Entonces, ¿1x + 2 es igual a 3?

A: 3, porque acá hay un número invisible que es 1 (señala la letra X), entonces al sumarlos x +2 es 3.

E: ¿Ésta podría ser la respuesta del ejercicio? O sea [que] la base mide x+2, esa podría ser la respuesta.

A: Mmm no, porque debe ser un número y ahí (dice mientras señala con el dedo X+2) no están sumados X y 2

Significado que tienen las letras

La mayor dificultad que tienen los (las) estudiantes respecto del uso de las letras radica precisamente en el significado que éstas tienen (Mason, 1999). Esto es, los estudiantes no saben lo que significan o representan las letras en matemáticas, especialmente en el álgebra escolar, razón por la cual crean reglas falsas para manipular expresiones algebraicas tales como: evaluar la letra, es decir, asignarle un valor numérico arbitrario; ignorar la letra, pues los estudiantes obvian la letra y operan sólo con los coeficientes numéricos; juntan las letras como si fueran objetos, entre otros errores que son producto del desconocimiento de los (las) estudiantes de lo que representan y significan las letras.

Dificultades provenientes del trabajo aritmético escolar

Algunos errores evidenciados por los (las) estudiantes relacionados con el uso de las letras, estaban fundados en concepciones erróneas provenientes del trabajo aritmético escolar. Para ilustrar un poco más esto, véase el siguiente extracto de la entrevista clínica del caso número 1:

Nota: Se utiliza la letra E para identificar las declaraciones del entrevistador y la letra A las del entrevistado.

E: Aquí ya están sumados X y 2 (dice mientras señala con el dedo la expresión X+2) o, ¿no los ha sumado?
A: No los he sumado
E: O sea que tendría que sumarlos para hallar la respuesta
A: Tendría que sumarlos para hallar la respuesta

Como vemos aquí, el estudiante ve la expresión X+2 como dos cosas separadas, es decir, no le encuentra ningún significado al signo más (+), tal vez como consecuencia del dilema "proceso-producto" y la "negación de la falta de cierre"; en otras palabras, el estudiante concibe que una suma tienen que dar como resultado obligatoriamente un solo número o una sola expresión. Esto obedece a que en su trabajo aritmético escolar sus profesores le decían que sumara 3+2, sin hacer énfasis en que con el hecho de tener el signo más ya estaban sumados, solo bastaba simplificar la expresión. Este tal vez sea uno de los mayores obstáculos al que se enfrentan los estudiantes novicios en lo que refiere al álgebra escolar.

Conclusiones

Los (las) estudiantes de grado noveno presentan una gran dificultad con el uso de las letras para representar números generalizados. Las principales interpretaciones erradas de las letras que tienen los estudiantes son: la letra como objeto, le letra ignorada y la letra evaluada.

- ✓ El dilema "proceso-producto" se constituye como una de las principales dificultades que presentan los (las) estudiantes al trabajar con letras como números generalizados. Esta dificultad proviene del trabajo aritmético escolar que se desarrolla bajo una enseñanza tradicionalista, la cual solo se preocupa por hallar resultados numéricos.

- ✓ Otra dificultad principal que tienen los (las) estudiantes con el uso de las letras, radica precisamente en el significado que éstas tienen; esto es, los estudiantes no saben qué significan ni qué representan las letras en álgebra.

- ✓ El inicio del trabajo algebraico escolar desde la escuela primaria a través del reconocimiento y de la expresión de generalidad, desarrolla en los estudiantes habilidades de pensamiento matemático y contribuye al uso de las letras con comprensión y significado.

REFERENCIAS

Agudelo-Valderrama, C. (2002). *Promoción del pensamiento algebraico en la escuela primaria: una propuesta que cobra sentido de acuerdo con nuestras concepciones sobre el conocimiento matemático*. Aula Urbana. No 37, pp- 18-19

Pretexto, Grupo (1996). *La variable en matemáticas como problema puntual. Búsqueda de causas en octavo grado*. Informe final de investigación Cód. 11301004-92 (no publicado). Universidad Distrital, Colciencias, Bogotá.

Mason, J.; Graham, A.; Pimm, D. & Gowar, N. (1999). *Raíces del álgebra y rutas hacia el álgebra*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

6. Hacia un concepto de fraccionarios en la Educación Básica

Jefferson Durán Triana[1]
Ovímer Gutiérrez Jiménez[2]

Resumen

Es ya conocida la mala interpretación y ejecución de los conceptos matemáticos en nuestro contexto educativo colombiano y en la proximidad referente. A todo esto debe sumársele la mala e imprecisa concepción educativa de los diferentes sistemas conceptuales que dan significado dentro de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por ello, mediante el siguiente artículo se ponen en conocimiento las diversas dificultades y fortalezas que son evidentes en la definición y concepción de la fracción como una relación parte-todo, desarrollado a partir de los conceptos y el lenguaje cotidiano que permita mejorar la enseñanza y aprendizaje de la fracción.

Palabras clave: Conceptos, fracciones, enseñanza, aprendizaje, contexto.

Abstract

There is already known the bad interpretation and execution of the mathematical concepts in our educational Colombian context and in the proximity. To all that to add the bad and vague educational conception of the different conceptual systems that give meaning inside the education - learning of the mathematics. It is for it, on which By means of the following article there put in knowledge the diverse difficulties and strengths, which are evident in the definition and conception of the fraction like a relation divides everything, developed from the concepts and the daily language that allows to improve the education and learning of the fraction.

Key words: Concepts, fractions, education, learning, context.

Introducción

"Es evidente que las matemáticas escritas no corresponden a las matemáticas habladas, puestas por escrito en diferentes sistemas de significación" (Pimm, 1990, p. 22), es decir que los diferentes sistemas conceptuales en los que se establece la necesidad de llegar a una concepción de números fraccionarios y a fracciones no son tomados en cuenta dentro de la educación matemática, dejándola a la deriva de interpretaciones polisémicas que obstaculizan la enseñanza y el aprendizaje del lenguaje matemático. A este respecto, en el proyecto de investigación "Fraccionar o repartir" Castro dice que

> Las fracciones son un contenido básico en la etapa de Educación Primaria, por lo que los programas de formación inicial de maestros las incluyen como parte del conocimiento del contenido. Parte de la responsabilidad de la enseñanza inicial y el aprendizaje de este campo conceptual recae en los maestros de Educación Primaria, cuya preparación profesional demanda un incremento y [una] mejora de sus conocimientos sobre este tópico matemático (2010, p. 4).

Este tópico está dejando más vacíos que los que supera, como se muestra en el caso del *Ejemplo 1*, en el que se vislumbra un lenguaje cotidiano lleno de preconceptos que, en ocasiones, develan un conocimiento de fracción:

Ejemplo 1.

- *"Mi mamá me dio la mitad de pan".*
- *"Falta un cuarto para las dos (2:00)"*
- *"Pagué 20 rollos de papel higiénico y llevé 24".*
- *"¡Ya es medio día¡".*

1 Estudiante de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Lengua Castellana (IDEAD - Universidad del Tolima). Integrante del semillero Laboratorio de ciudad. e-mail: jefryduranrock@hotmail.com

2 Licenciado en Matemáticas de la Universidad del Tolima. Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia. Especialista en Pedagogía de la Universidad del Tolima y Especialista en Gerencia de Instituciones Educativas (IDEAD - Universidad del Tolima). Director del programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima. e-mail: ogutierrezji@ut.edu.co

Expresiones lingüísticas como las anteriores demuestran que los (las) niños(as) pueden construir multitud de expresiones para evidenciar una serie de preconceptos, que podrían llegarse a relacionar con fraccionarios para obtener un aprendizaje contextualizado. Esto se hace para que los (las) estudiantes construyan, a partir de sus pre-saberes, el concepto de fraccionario. Para ello, es necesario seguir lo propuesto por Ausubel (citado por Arteta, et al., 2012) quien afirma que es conveniente comprender de una manera significativa el concepto de fracción y escribirlo a partir de los conocimientos previos en aras de lograr un aprendizaje significativo.

En este sentido, el mismo Ausubel es retomado por Ochoa y Vivas (2007) para mencionar que "la acción del docente debe partir de la experiencia previa del alumno, de sus conocimientos, sus necesidades e intereses" (p. 13). Dado este tipo de prácticas son escasas en las aulas de clase, ello conlleva a que se pierda esta amplia variedad de expresiones que muestran una serie de preconceptos o ideas previas sobre lo que es un fraccionario.

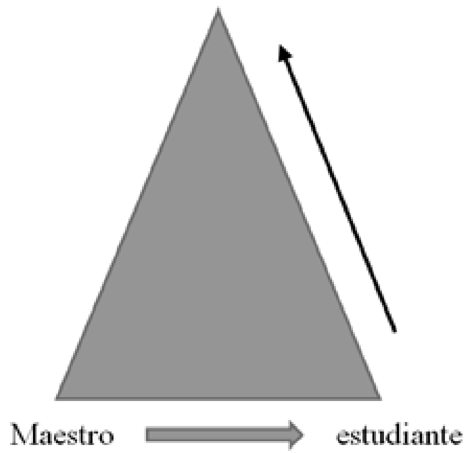
En esta perspectiva, Llinares y Sánchez (1997) afirman que una de las formas prioritarias para comenzar a tratar un tema matemático consiste en abordar o desarrollar las temáticas apelando a un lenguaje cotidiano, un lenguaje que todo el mundo use, así como en el anterior *Ejemplo 1*. Ahora bien, también hay que tener en cuenta los diferentes sistemas conceptuales que contienen una carga significativa a la hora del aprendizaje de los fraccionarios, como en el siguiente esquema.

- ✓ Distintas representaciones de "un medio".
- ✓ "La mitad" (expresión verbal).
- ✓ 0.5 (expresión decimal).
- ✓ (Notación más común de fraccionario).
- ✓ 1/2 (otra notación de fraccionario).
- ✓ 50% (expresión en porcentaje).
- ✓ |---|---| (representación gráfica).

Esquema 1. (Tomado de Arteta, 2012)

En este sentido, en aras de develar un concepto de fraccionarios en la educación básica, es de suma importancia identificar el valor de los sistemas conceptuales que significan y dan sentido al concepto de fracción. Según Duval, citado por Arteta (2012), "si no se dispone de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, no parece posible aprenderlo y comprenderlo" (p. 58). Allí se juega en el aula con una variedad de esquemas fraccionarios que promueven una mayor dinámica en la comunicación de estos, evidenciando que no solo existe una única forma de enseñar fracciones y que hay representaciones verbales, simbólicas, gráficas y tabulares, mejorándose la comunicación en el aula, tal como lo demuestra el siguiente esquema:

Conocimiento matemático

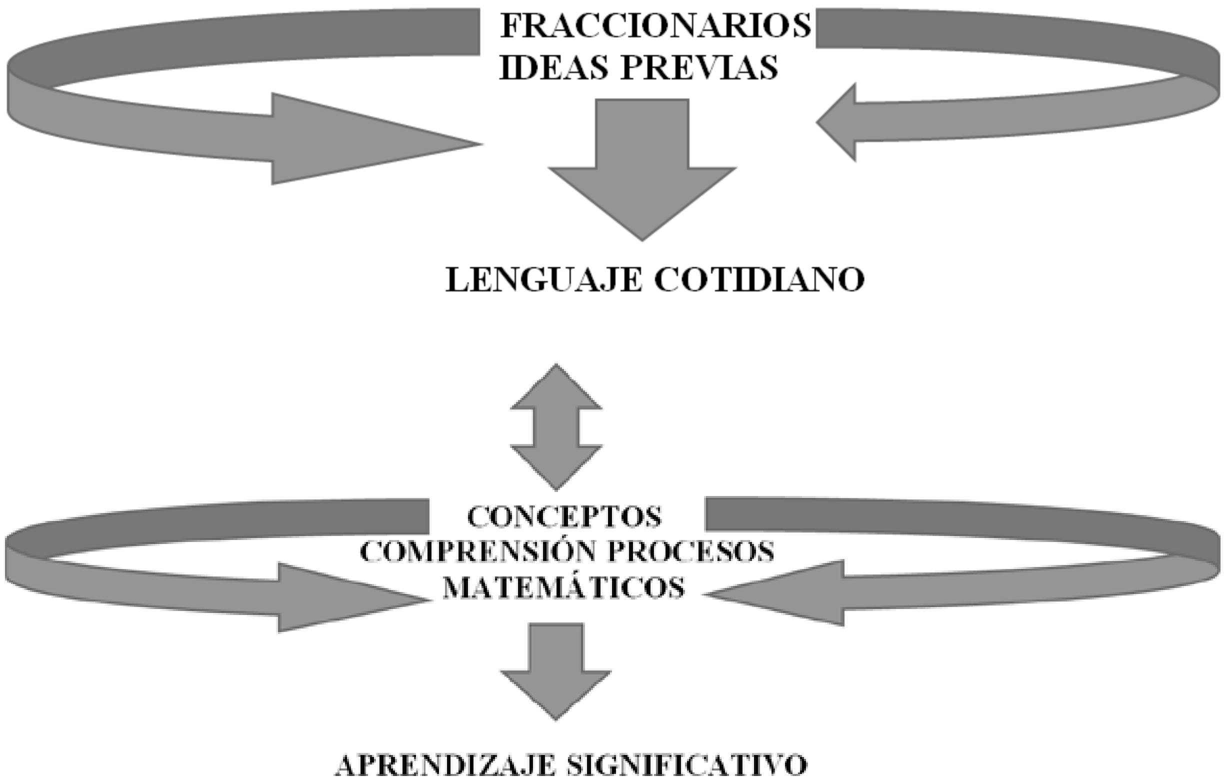


A esto se suma Sanmarti, quien dice que,

> el proceso de construcción del conocimiento científico comporta pasar de hablar un lenguaje personal, impreciso y con muchas expresiones importadas del conocimiento cotidiano, a ser capaces de utilizar el de la ciencia, mucho menos polisémico. Pero nos equivocaríamos si pensáramos que sólo se trata de incorporar un vocabulario nuevo y preciso. Las palabras sólo tienen sentido si expresan una idea, por lo que en la enseñanza de las ciencias no se puede separar un aprendizaje del otro y no se puede suponer que nos apropiamos de las ideas tan sólo nombrándolas (2005, p. 3).

En este sentido, no solo es cuestión de reemplazar esas expresiones lingüísticas de tipo cotidiano, sino que estas sirvan de puente dentro de las nuevas sistematizaciones conceptuales de los educandos. Todos sabemos y somos conscientes de que las dificultades que presentan los (las) estudiantes en la comprensión de fraccionarios, motivo por el cual los "lenguajes del mundo deben tender a develar] objetos matemáticos" y construir la realidad de los educandos, entendiendo la educación como un todo coherente que no necesita ser fraccionado. Esto significa que la mirada del mundo, de los conocimientos de la ciencia, son aspectos secuenciales y no hay distinciones en cuanto a lo que se aprende, de manera que todos los saberes están enmarcados dentro de un lenguaje polisémico y bajo una multiplicidad de modos de ver los objetos matemáticos.

Por ello, desde nuestra condición de maestros transformadores, en nuestras prácticas educativas debemos dar cuenta del *todo coherente* de los procesos educativos sin fraccionarlos. De hecho, los diferentes marcos de conceptualización deben ser llevados al aula dándose a conocer que hay una forma de más a la hora de comprender los tópicos matemáticos, puesto que no hay prioridad más acérrima de la matemática que la de la develación de la existencia misma a través de un lenguaje simbólico y cotidiano. En suma, debe tenerse presente que la matemática está a la disposición de develar objetos de la existencia.



Conclusiones

Este documento titulado "hacia un concepto de fraccionarios en la educación básica", es solo una aproximación a lo que muchos teóricos en el área de la didácticas de las matemáticas han tratado de concatenar, una enseñanza-aprendizaje de los tópicos matemáticos con sentido. Por otro lado, no se pretende dejar por sentado ninguna especulación teórica referente a un solo concepto de fraccionarios, si no, más bien develar otros sistemas conceptuales que sirvan de vehículo hacia un aprendizaje significativo de los saberes disciplinares.

Por lo tanto, se destacan en este texto algunas conclusiones que pueden cambiar nuestras representaciones mentales y sociales acerca de los diferentes formas de enseñar y aprender con sentido, a este respecto la primera conclusión es; la mala construcción del concepto de fracción, donde se deja la representación de simbólica única, dejando atrás los otros sistemas conceptuales, a la hora de representar los objetos matemáticos en nuestro caso la representación de fraccionario (Duval, 2004).

En suma, la poca conciencia por parte de los maestros de contextualizar mal los tópicos matemáticos, es decir no tener en cuenta los preconceptos, que el niño utiliza en su diario vivir para alcanzar unos aprendizajes significativos y donde le ayuden a desarrollar competencias matemáticas. De otra forma, la importancia del lenguaje cotidiano en las clases de matemáticas, a nuestro caso el concepto de fraccionarios, ir más allá de un solo sistema representacional del mismo , que contribuya en el niño desempeñarse matemáticamente en la vida diaria, no es cosa fácil pero es posible de ser perseguido por no fragmentar la educación en nuestro contexto.

REFERENCIAS

Arteta, J. &. et al. (2012). *Los fraccionarios en primaria; retos, experiencias didácticas y alianzas para aprender matemáticas con sentido.* Barranquilla- Colombia. Universidad del norte.

Duval, R. (2004). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle (Original publicado en idioma francés en 1999).

Llinares, C. & Sánchez, G. (1997*). Fracciones. La relación parte-todo*. Madrid: Editorial Síntesis S. A.

Ochoa, F. & Vivas, G. (2007). *La formación como principio y fin de la acción pedagógica.* Revista educación y pedagogía, Vol. XIX, número 47, enero-abril. Recuperada el 2 de agosto del 2014 de http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/6680/6122

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el Aula*. Madrid: Ediciones Morata S. A., & Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia Ciudad Universitaria.

Sanmarti, N. (2007). *Hablar, leer y escribir para aprender ciencia.* Universidad Autónoma de Barcelona: Publicado en: Fernández, P. (coodra.) (2007). *La competencia en comunicación lingüística en las áreas del currículo.* Colección Aulas de Verano. Madrid: MEC, Tomado el 13 de julio del 2013,
http://www.mrpmenorca.cat/index2.phpoption=com_docman&task=doc_view&gid=118&Itemid=31

7. Una mirada: epistemología en la educación

Esteffany Ipuz Montoya[1]
Diana Trilleros Duarte[2]
Felipe Urueña Pérez[3]

Resumen

La educación en la actualidad ha sido modificada por numerables entes que pretenden "aparentemente" volverla revolucionaria y transformadora. Sin embargo, se han evidenciado falencias y vacíos que han dejado algunas de estas modificaciones. Por ejemplo, la carrera vanguardista que ha tenido la sociedad por acceder más fácil y sofisticadamente a los avances científicos y tecnológicos, la falta de pertinencia social de los programas de formación docente, la falta de inclusión de orientación ciudadana en los procesos de enseñanza y de aprendizaje impartidos en los establecimientos educativos, la puesta en práctica (en ocasiones sin continuidad) de varios programas que son copias fieles de los que hay en otros países sin tener en cuenta que las necesidades atendidas son diferentes, entre otros, son claros ejemplos de los desatinos que ha tenido la educación, obedeciendo a las desacertadas decisiones que ha tomado el Estado en cuanto a calidad educativa se refiere.

A manera de ejemplo, en el país quienes deciden el futuro de la educación en todos sus ámbitos son personas que no están capacitadas para ello, que han sido designadas meramente por actos políticos dudosos y a quienes claramente les importa poco trabajar por una educación con calidad, simplemente se dedican a esperar allí pacientemente mientras se les asigna un mejor puesto con un mejor salario. Por ello, a la epistemología le corresponde enterarse si la pedagogía es verdadera o falsa, apuntando por qué es verdadera o falsa, para dar lugar a póstumas conclusiones que mejoren y encaminen adecuadamente la tan anhelada calidad educativa.

Palabras claves: Epistemología, educación, filosofía, ciencia, tecnología, enseñanza, aprendizaje, ciudadanía, transformar, formar, sociedad.

Abstract

Education today has been modified by innumerable entities that seek to "apparently" revolutionary and transforming it again. However, they have shown deficiencies and gaps that have left some of these changes. For example, the pioneering career that has taken society by access easier and sophisticatedly scientific and technological advances, lack of social relevance of teacher training programs, the lack of inclusion of citizen orientation in the teaching and taught in educational institutions, implementation (sometimes no continuity) of several programs that are faithful copies of those in other countries regardless of the unmet needs are different, among others, learning are clear examples of follies that education has, in obedience to the misguided decisions taken by the state in terms of educational quality is concerned.

As an example, in the country who decide the future of education in all areas are people who are not trained for this, which have merely been designated by dubious political acts and who clearly cares little work for quality education, simply they engage in wait there patiently while they are assigned a better job with better pay. Therefore, epistemology corresponds pedagogy learn whether true or false, pointing out what is true or false, to lead to conclusions Posthumous improve and properly routed the much desired educational quality.

Key words: Epistemology, education, philosophy, science, technology, teaching, learning, citizenship, transform, educate, society.

1 Licenciada en Matemáticas de la Universidad del Tolima. Especialista en Pedagogía de la Universidad del Tolima y estudiante de tercer semestre de la Maestría en Educación de la misma universidad. e-mail: ojitos53890@hotmail.com

2 Licenciada en Matemáticas de la Universidad del Tolima. Especialista en Pedagogía de la Universidad del Tolima y estudiante de tercer semestre de la Maestría en Educación. e-mail: dianitatrilleros@hotmail.com

3 Licenciado en Inglés de la Universidad del Tolima. Especialista en Pedagogía de la Universidad del Tolima y estudiante de tercer semestre de la Maestría en Educación. e-mail: lfuruenap@gmail.com

Introducción

La epistemología en la educación juega un papel muy importante ya que "es la rama de la filosofía que estudia la definición del saber y la producción de conocimiento" (Castañeda, 2008, p. 36). De ahí que sea esta la que analiza el conocimiento que será entregado a la humanidad. No es un conocimiento acabado y sin errores, como se concebía antiguamente la ciencia, sino que se trata de un conocimiento sujeto a críticas, cambios e innovaciones. Es allí donde interviene entonces la escuela, pues debe ser un escenario propicio para formar personas íntegras, reflexivas y críticas. En suma, la epistemología permite compenetrarnos a través del estudio y del aprendizaje, no sólo de las experiencias pasadas, sino que desarrolla la capacidad y aporta el conocimiento para poder hacerle frente a un futuro siempre incierto en cualquier sociedad.

Desarrollo

Con el paso del tiempo la filosofía y la educación han sufrido cambios radicales en su forma, en sus componentes y en quienes a su vez intervienen en estos aspectos. Dichos cambios obedecen quizá a la carrera vanguardista que ha tenido la sociedad por acceder de manera más fácil y sofisticada a los avances y conocimientos científicos y tecnológicos a los cuales el mundo se ha visto sometido.

Justamente, para investigar de qué manera se ha llevado a cabo la incursión de estos nuevos saberes y formas de vida, la epistemología está fundamentada, al ser esta una rama filosófica que estudia el conocimiento científico, sus conceptos y métodos. Desde sus orígenes, la palabra epistemología proviene del griego *episteme* que significa conocimiento riguroso o sujeto a reflexión crítica, y de *logos* que es teoría.

Como es propio, en el campo de la pedagogía estas definiciones no varían sino que se ajustan a los intereses educativos que se pretenden alcanzar dentro de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, teniendo como objetivo estudiar críticamente la educación en todos sus aspectos, buscando perfeccionarla. De allí que se asuma la epistemología no solamente como la rama de la filosofía cuyo objetivo es estudiar el conocimiento, pues no se podría hablar simplemente de la teoría dentro de un contexto social totalmente práctico. No sólo se trata de formar seres con habilidades para que se puedan expresar o sean capaces de resolver problemas en diversas áreas, sino también formar para la ciudadanía. La escuela y la familia son dos entes fundamentales dentro del proceso educativo, los cuales deberían realizar un trabajo mancomunado para formar un ciudadano que actúe de manera constructiva, crítica, y que sea parte de una sociedad democrática, sin la intención de estandarizarlo sino, al contrario, para potencializar sus habilidades y pueda, desde su diferencia, mejorar en todos los ámbitos y escenarios donde se desenvuelva como individuo.

De este modo, la epistemología aplicada a la educación sirve para analizar el proceso educativo de modo crítico y reflexivo, para hacer un análisis de los avances y baches de dicho proceso, con miras a perfeccionar los primeros y superar los segundos, estudiando todos los factores que intervienen en este con el propósito de encontrar soluciones. De igual manera, se evalúan desde la epistemología de la educación todas las ciencias del saber y los métodos que estas proponen para llevar a cabo la adquisición y el dominio del conocimiento por parte de los educandos.

Por lo anterior, la epistemología estudia la organización curricular de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, la conexión entre las ciencias del conocimiento, las metodologías impartidas para la orientación del proceso, la concatenación entre los agentes participantes en él y su formación, el contexto escolar, el sentido social y la calidad de la educación, ya que con el paso del tiempo han surgido innumerables teorías, métodos y modelos pedagógicos que pretenden mejorar las falencias del sistema educativo. En éste el docente ha perdido su papel dentro del contexto académico y es reconocido como un *supervisor* de procesos cognitivos y un agente encargado netamente de la disciplina, olvidando que lo fundamental es generar diferentes ambientes en los que los docentes creen en los estudiantes pensamientos filosóficos y críticos, con los cuales aporten aspectos positivos y formadores como seres humanos capaces de transformar la sociedad, empezando por el contexto familiar y profundizando en un campo totalmente académico. El objeto está enfocado en validar el conocimiento científico, conocer las ideologías y modelos formulados, las teorías y sus efectos, secuencias y consecuencias en la labor de educar.

De hecho, estas situaciones hacen que la tarea que tiene la epistemología dentro de la educación sea un proceso riguroso, al estar aquella en constante cambio debido a su objeto de estudio y a las características de este, al ser un fenómeno social, cambiante y susceptible, permeado de múltiples cambios y expuesto a factores tanto individuales como comunitarios que afectan o potencializan su función.

Desde hace varios años, la sociedad ha sufrido transformaciones incalculables en todos sus ámbitos de estudio, arrojando una multiplicidad de vacíos, falencias y reacciones no tan acertadas en la conformación de seres íntegros y altamente capacitados para enfrentarse al mundo real. De allí que la relación entre epistemología y educación resulte compleja y su abordaje posibilite una experiencia de conocimiento desde las prácticas educativas, de su relación con el saber, de la adquisición de la verdad, de lograr hacer ver la necesidad y el porqué de aprender las diferentes ramas del conocimiento, dejando de lado la repetición y la vaga idea de la enseñanza como el depositar o llenar al individuo de información simplemente, invitando a reformar, transformar y emplear nuevas y mejores estrategias de aprendizaje, formas de orientar, procesos de enseñanza sujetos a las necesidades actuales. Con esto se pretende responder a los desafíos educativos que plantea un mundo en constante y acelerada transformación, como bien lo hace ver Fullat, retomado en el documento *Epistemología*:

la epistemología de la educación, debe explicar qué es y qué valor posee cada una de las ciencias de la educación, averiguando así mismo qué son ellas como conjunto y si poseen, en cuanto tales, estatuto autónomo, del mismo modo indagará qué tan acertados son los modelos pedagógicos puestos en escena para abordar el proceso educativo (2011, s.p).

Otro de los problemas principales de la educación actual está basado en que las autoridades encargadas a nivel nacional son nombradas por méritos políticos dudosos, por procesos incorrectos (corruptos) y simplemente partidistas, factores influyentes que dejan observar las falencias por las cuales atraviesa la educación colombiana. La mala infraestructura de la instituciones educativas, la falta de recursos institucionales, la pobre capacitación (tecnológica) para los (las) docentes y estudiantes y los bajos resultados obtenidos en diferentes exámenes nacionales e internacionales (por ejemplo, en las pruebas Programme for International Student Assestment [PISA]). Estos son los ejemplos claros de los procesos incorrectos y los enfoques distorsionados por un mal manejo administrativo, el cual genera como resultado la deserción académica y la baja calidad educativa.

No es desconocido por los educadores y demás agentes participantes de los procesos de enseñanza y de aprendizaje que dentro de la formación que se recibe se dejan en entre dicho el abordaje de todos estos temas y se abre paso a la terrible condena de seguir llevando a cabo la labor docente de una manera poco apropiada, de seguir escribiendo la misma historia tan sólo cambiando el instrumento con el que se escribe y de transmitir en pleno siglo XXI conocimientos sin razones.

Esta descripción quizá sea la respuesta a la problemática que aún se tiene en el ámbito escolar. De no ser involucradas ambas ciencias (Epistemología y Educación) dentro de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, se estará condenado a seguir impartiendo educación de baja calidad y a seguir formando seres meramente mercantiles.

Sin embargo, cabe resaltar que dicha situación provoca la búsqueda de una mejor formación profesional y la grata sensación cuando ésta es hallada, así esté sujeta a la decisión individual por constituirse en ser un transformador de sociedad y formador de formadores.

Conclusión

Para alcanzar el sueño de cambiar la amarga situación que se vive en el país (desempleo, embarazos en adolescentes, explotación, injusticias, inequidad, entre otros), es necesario cambiar las bases de la educación. Esto es, resignificar no sólo sus contenidos, sino también sus métodos, medios, dirigentes y demás, para crear conciencia ciudadana y formar individuos democráticos que se desenvuelvan con eficacia en todos sus ámbitos y le sirvan a la sociedad. De igual manera, tomar en cuenta los aportes de la epistemología y no pasarlos por alto, así como elegir a pedagogos y profesionales en educación para que dirijan lo que se debe enseñar en los establecimientos educativos, serían formas de propender por una educación con calidad.

REFERENCIAS

Castañeda, M. (2008). *Metodología de la investigación feminista*. México: Centro de Investigaciones Interdisciplinarias en Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Epistemología (2011, 06). *Epistemología. ClubEnsayos.com*. Recuperado 08, 2015, de https://www.clubensayos.com/Ciencia/Epistemología/20188.html

Ministerio de Educación Nacional (2004). *Estándares básicos de competencias ciudadanas: Formar para la ciudadanía… ¡Sí es posible! Lo que necesitamos saber y saber hacer*. Serie Guías No. 6, Bogotá D.C.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el Aula*. Madrid: Ediciones Morata S. A., & Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia Ciudad Universitaria.

Sanmarti, N. (2007). *Hablar, leer y escribir para aprender ciencia.* Universidad Autónoma de Barcelona: Publicado en: Fernández, P. (coodra.) (2007). *La competencia en comunicación lingüística en las áreas del currículo.* Colección Aulas de Verano. Madrid: MEC, Tomado el 13 de julio del 2013, http://www.mrpmenorca.cat/index2.phpoption=com_docman&task=doc_view&gid=118&Itemid=31

Revista EJES

8. Visualização ou ilusão ótica: o que dizem os mestrandos[1]

José Carlos Pinto Leivas[2]

Resumo

Este trabalho aborda uma pesquisa qualitativa realizada com sete estudantes de um Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, a qual teve como objetivo investigar como alunos, ao iniciarem uma disciplina de Geometria, interpretavam uma figura de ilusão ótica e uma representação geométrica específica. As habilidades de percepção e representanção espacial são relevantes para o investigador na construção de pensamento geométrico e podem ser desenvolvidas, constituindo-se num campo de pesquisa atual. Os dados coletados, por meio de registros escritos dos alunos, mostraram que, mesmo sendo eles professores atuantes na escola básica, a maioria apresenta dificuldades na interpretação de imagens, quer geométricas, quer de ilusão ótica. O artigo finaliza com a sugestão de três atividades que podem ser realizadas para o desenvolvimento dessas habilidades visuais necessárias na formação inicial e continuada de professores.

Palavras-chaves: Visualização, ilusão ótica, representação.

Abstract

This paper presents a qualitative research that was conducted with seven students from a Professional Master on Teaching of Mathematics. It aimed to investigate how students, to begin a discipline of geometry, interpreted a figure of optical illusion and a specific geometric representation. Perception's abilities and spatial representation are relevant to the investigator to construct geometric thinking and can be developed, constituting a field of current research. Data were collected by means of written records of students. They showed that, even though they are teachers working in elementary school, most present difficulties in the interpretation of images, whether geometric or optical illusion. The article concludes with the suggestion of three activities that can be realized for develop these visual abilities that are needed in the initial and continuing training of teachers.

Keywords: Visualization, visual illusions, representation.

Introdução

O artigo emergiu da experiência do investigador em lidar com dificuldades encontradas por estudantes, nos diversos níveis de escolaridade, para interpretarem determinadas representações em Matemática, mais acentuadamente em Geometria. Em palestras proferidas, a fim de despertar o interesse dos expectadores pelo tema abordado, muitas vezes, optou-se por iniciá-las com a apresentação de uma dessas imagens que apresentam ilusão ótica. Elas despertam, geralmente, muito interesse e servem para explorar os diversos olhares que se pode ter para a própria área de atuação. Também conduzem a debates sobre os significados que uns e outros atribuem a tais imagens e à Matemática.

Exemplifica-se com a figura 1, a qual apresenta dualidade de interpretação em relação ao número de pernas do elefante. Dependendo do ponto pelo qual o observador entra na imagem, uns dirão que, obviamente, são quatro pernas, por ser um mamífero. Outros, mais atentos às imagens, principalmente aqueles ligados às Artes Visuais, perceberão que, se entrarem na figura acompanhando a tromba do elefante pelo lado direito, ele possui seis pernas.

1 Artigo originado a partir de comunicação apresentada no 21 Encuentro de Geometría y sus aplicaciones de 19 a 21 de junho de 2013 na cidade de Bogotá, Colômbia, em língua española.

2 Profesor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da UNIFRA, Centro Universitário Franciscano de Santa Maria – RS – Brasil y Leivas Universidade Luterana do Brasil. e-mail: leivasjc@unifra.br ; leivasjc@yahoo.com.br

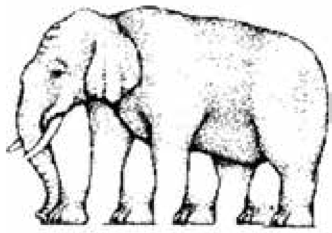


Figura 1. Quantas pernas tem o elefante? Capturada do Google imagens em 19 mai 2013.

Na figura 2, a seguir, encontram-se duas linhas retas que saem do centro da figura. Elas tiram a impressão de serem retas, fazendo com que pareçam curvas.

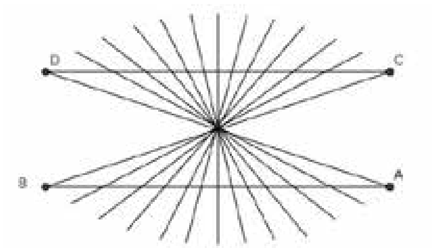


Figura 2. Linhas paralelas e retas. Adaptada de Moise e Downs pelo autor

As duas imagens, assim como tantas outras, bem como a apresentação do trabalho que deu origem ao artigo, serviram para motivar o pesquisador a escrevê-lo. Nele tratar-se-á, inicialmente, sobre visualização e ilusão ótica, na tentativa de distinguir uma de outra, no sentido de que a primeira é uma imagem, enquanto que a segunda é uma representação matemática.

Pode-se dizer que ilusões óticas e Matemática sempre andaram juntas com as Artes. A história ilustra muitas situações nas quais a ciência auxiliou os artistas em suas obras que geram imagens dúbias, o que não é objetivo deste trabalho. Entretanto, na área artística, o termo utilizado é anamorfose, oriundo do grego, significando “sem forma”. Com essa técnica, podem ser produzidas tais imagens, as quais podem ser apoiadas na perspectiva matemática.

Santos (2011) faz um estudo teórico sobre o uso de anamorfose, no qual uma das aplicações para a Matemática está na relação de representações em sistemas de coordenadas cartesianas e coordenadas polares. Semmer (2013) traz uma investigação sobre como utilizar anamorfose para desenvolver conceitos de geometria projetiva em alunos do ensino médio, de forma interdisciplinar, envolvendo Arte e Matemática, incluindo atividades que podem ser realizadas com pêssankas.

As ilusões óticas têm sido estudadas por psicólogos há longo tempo e indicam que, nem sempre, aquilo que a pessoa vê é o que se pensa que seja. O olhar, ao fixar algum objeto, acostuma-se com o mesmo e o cérebro pode captar alguns indícios dele que não sejam obrigatoriamente verdadeiros. Algumas vezes, ele pode preencher as lacunas existentes, como no caso do elefante, e produzir falsa imagem do objeto, caracterizando, dessa forma, uma ilusão ótica. Esse estudo não é objeto deste artigo.

Pretende-se, neste trabalho, trazer alguns aspectos sobre visualização, como campo de investigação já existente há algum tempo na Educação Matemática e, particularmente, em Geometria. Durante as aulas ministradas pelo investigador, em diversos níveis de ensino, encontraram-se estudantes com dificuldades de interpretar representações geométricas, ou seja, visualizar objetos que estão representados no papel, sejam eles planos ou espaciais. Também foram encontrados professores que não conseguem representar adequadamente entes geométricos para seus estudantes, especialmente as representações de objetos tridimensionais no plano.

Este artigo apresenta uma pesquisa realizada com sete estudantes, todos professores do ensino básico brasileiro, em formação de mestrado, participantes de uma disciplina de Geometria na qual o autor do artigo é o professor responsável.

Entende-se que a pesquisa tem cunho qualitativo, uma vez que analisa a interpretação dos indivíduos ao iniciarem uma disciplina, tratando-se, pois, de um estudo de caso. Apresentou-se a figura 3, clássica nos estudos de ilusão ótica e verificou-se quais foram as interpretações dadas pelos indivíduos. A partir disso, uma representação geométrica foi dada, figura 4. Solicitou-se que a interpretassem. A hipótese era de que os indivíduos teriam dificuldades na interpretação dessa representação geométrica. Assim, a questão de pesquisa foi a seguinte: como os investigados interpretam uma ilusão ótica e uma representação geométrica?

A seguir serão apresentadas algumas considerações sobre o tema visualização e sobre representação para analisar as respostas dadas pelos indivíduos participantes da pesquisa.

Visualização e representação

Piaget e Inhelder (1993), ao tratarem sobre a representação do espaço pelas crianças, concluíram que a percepção espacial não acarreta sua representação. Isso significa que o fato das crianças perceberem sensivelmente o espaço, não é garantia de que elas o saibam representar. Para eles,

> a percepção é o conhecimento dos objetos resultante de um contato direto com eles. A representação consiste, ao contrário, - seja ao evocar objetos em sua ausência, seja quando duplica a percepção em sua presença - em completar seu conhecimento perceptivo, referindo-se a outros objetos não atualmente percebidos (p. 32).

Mais além, Piaget e Inhelder (1993) afirmam que a representação do espaço não é dada a priori, ela é construída. Em suas pesquisas, eles verificaram que a criança constrói a representação de espaço de modo inverso ao que geralmente é apresentado na escola. Na Matemática escolar, costuma-se apresentar, primeiramente, noções de Geometria Euclidiana para, somente depois, tratar de Geometria Projetiva (representação de sólidos por meio de perspectivas) e, em último caso, já na Matemática superior, é que é apresentada a topologia (relações de vizinhança, separação, ordem, envolvimento e continuidade).

No que diz respeito ao espaço perceptivo e representativo, os autores concluíram que as imagens dos objetos não resultam unicamente da percepção e que a construção do espaço começa no plano perceptivo, prosseguindo no plano representativo.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), documento que norteia, de certa forma, o ensino básico, o uso do computador permite que sejam criados ambientes de aprendizagem que fazem emergir novas formas de pensar e aprender, uma vez que "[...] desenvolve processos meta cognitivos, na medida em que o instrumento permite pensar sobre os conteúdos apresentados e as suas formas de representação, levando o aluno a 'pensar sobre o pensar" (p. 147).

Para desenvolver esse pensar sobre o pensar e poder perceber e representar os objetos geométricos, é necessário, para o pesquisador, que seja desenvolvida a habilidade de visualização, por diversos caminhos, sejam eles usando as tecnologias computacionais ou outros recursos didáticos pertinentes, como é o caso das anamorfoses, com a Geometria Projetiva ou um software de Geometria Dinâmica.

No século XVII, tempo de Desargues, o método de Geometria Projetiva surgiu, segundo Le Golf (1994), como certa ruptura, se é que houve, com os métodos tradicionais e não foi recebido de imediato, como ocorreu com o método cartesiano, que levaria a uma Geometria Analítica e ao desenvolvimento da Nova Análise. Isso só iria se concretizar, em 1872, quando Felix Klein introduziu em 1872 o conceito de geometria abstrata. A academia se ressentia com a ideia de que a pintura tinha de representar as coisas não como o olho vê, mas como a perspectiva necessária para a razão.

Numa primeira reformulação das normas emanadas pelo *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM (Princípios e normas, 2008), foi dada ênfase ao pensamento visual, identificando "a geometria e sentido espacial", o que Costa (2000) enfatizou no "uso da visualização e raciocínio espacial para resolver problemas tanto dentro como fora das matemáticas" (p. 162). A norma apontou, ainda, para o uso de visualização e modelação geométrica para resolver problemas.

A habilidade de manejar objetos abstratos de origem concreta é algo conhecido por muitos especialistas e visualização em Matemática, com essa forma de atuar, explicita possíveis representações concretas porquanto desvela relações abstratas interessantes ao fazer do matemático.

Kilpatrick (1994) preconiza que visualização é uma área de pesquisa atual e a pesquisa de Andrade e Nacarato (2004) aponta a tendência de visualização e representação pelo uso da experimentação. Gutierrez e Boero (2006), em trabalhos do *International Group for Psychology of Mathematics Education* (PME), também indicam pesquisas que destacam a íntima relação entre o ensino de Geometria e a imaginação, intuição, visualização e representação espacial no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Entendeu-se visualização como "processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos" (Leivas, 2009, p. 22). Portanto, ela é uma habilidade que pode ser desenvolvida nas pessoas, até mesmo para quem não têm o órgão da visão, as quais, mentalmente, formam imagens de objetos geométricos por diversos mecanismos que podem ser utilizados, como os recursos materiais. Assim, é evidente a diferença básica entre a habilidade de visualização, a qual pode ser desenvolvida e as ilusões óticas, que dependem da visão do indivíduo.

Em Matemática, a visualização não tem um fim em si mesma, mas é um meio para um fim, que é sua compreensão, segundo Zimmermann e Cunningham (1990), o que a difere de ilusão ótica. Para Eisenberg e Dreyfus (1990), "embora muitas vezes defendam os benefícios da visualização de conceitos matemáticos, muitos alunos são relutantes em aceitá-los, pois preferem os algoritmos sobre o pensamento visual" (p. 25).

Voltamos ao ilusionismo e às anamorfoses, ou seja, às imagens distorcidas que, pela observação de um ponto onde se localiza o foco do observador, ou por meio de objetos refletores, aparecem reconstituídas aos olhos. A literatura aponta que os primeiros experimentos utilizando essa técnica surgiram no século XV, quando foi utilizada em diversos quadros, murais e afrescos cujas pinturas se confundiam com a arquitetura das paredes. Posteriormente, já no século XVII, foi utilizada a técnica de espelhos, que torna as imagens mais interessantes e difusas para o observador.

Dessa forma, tratar ilusões óticas, em geral, é diferente de tratar de visualização, no sentido matemático das representações geométricas. Acredita-se, como Hoffer (1977), citado por Del Grande (apud Lindquist e Shulte, 1994), que essa é uma habilidade que pode ser desenvolvida. O autor define: "discriminação visual é a habilidade de distinguir semelhanças e diferenças entre os objetos e memória visual é a habilidade de se lembrar com precisão de um objeto que não mais está à vista e relacionar suas características com outros objetos, estejam eles à vista ou não" (p. 159). A seguir descreve-se a pesquisa propriamente dita.

A pesquisa

Como toda pesquisa deve apresentar um problema e um objetivo claro, a proposta foi investigar como alunos, ao inciarem uma disciplina de Geometria nem um mestrado profissional em ensino de Matemática, interpretavam uma ilusão ótica e uma representação geométrica.

O objetivo com a atividade era despertá-los para os diversos olhares que o educador matemático deve ter ao cumprir o programa de uma disciplina, no caso presente, desenvolver habilidades de percepção e representação espacial.

A pesquisa foi realizada na primeira aula da disciplina Fundamentos de Geometria do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, no Rio Grande do Sul, Brasil, em que o autor é o professor responsável e ocorreu no primeiro semestre do ano de 2013. Participaram os sete alunos matriculados, todos eles são professores que atuam em escola básica, pública ou privada, sendo que a formação dos mesmos foi realizada em universidades públicas e também particulares.

A pesquisa de cunho qualitativo, segundo as concepções de Fazenda et al. (2006), em que, nas Ciências Humanas, tem como recurso básico a descrição. "As ciências exatas como as Matemáticas e, especificamente a Geometria, não estão interessadas em formas reais intuitivas através dos sentidos, como estão os pesquisadores descritivos da natureza" (p. 49). Para os autores, o mérito principal de uma descrição não é sempre a sua exatidão ou seus pormenores, mas a capacidade que ela possa ter de criar uma reprodução tão clara quanto possível para o leitor da descrição. Poderá haver tantas descrições de uma mesma coisa quantas sejam as pessoas especialistas que vejam a mesma coisa (Fazenda, 2006, p. 56).

Numa descrição de ilusão ótica, as pessoas descrevem essas diversas formas, dependendo do olhar no momento em que se apresenta a imagem. Entretanto, em uma representação geométrica, por exemplo, como a da *Figura 2*, entende-se que elementos fundamentais do objeto deveriam ser descritos por professores de Matemática, pois, “a fim de se descrever alguma coisa, precisamos comumente mencionar um número de atributos dessa coisa” (Fazenda, 2006, p. 57).

Quanto aos procedimentos empregados, foi distribuída uma ficha na qual os alunos deveriam fazer suas anotações, por escrito, e entregar ao professor pesquisador. Orientou-se que cada um respondesse ao solicitado, sem consultar o colega que se encontrava ao seu lado. Projetou-se a clássica figura 3, a seguir, para que observassem e respondessem: o que era visualizado na figura?

Capturada do Google imagens em 19mar2013.
Figura 3. A Moça e a Velha

Em 1915, W. E. Hill publicou pela primeira vez essa imagem, com a ideia de que é difícil ver o que se deve ver. Ela representa uma garota bonita olhando para longe, mas também pode ser a representação da imagem de uma senhora idosa olhando para o chão. Na realidade, a chave da identificação está na percepção do que se espera ver. Se o observador se concentrar no colar da garota jovem, esse pode representar a boca da idosa. O queixo e as faces da garota representam o nariz da senhora. O protocolo das respostas descritivas dos mestrandos está a seguir.

Quadro 1. Protocolo das descrições dos mestrandos sobre a figura 3[3].

Estudante 1:	Figura com duas imagens (rosto de duas pessoas, mulheres); uma de cabelo longo e outra de cabelo curto.
Estudante 2:	O rosto de um menino (perfil) submerso na areia (terra) com parte da cabeça coberta por um tecido.
Estudante 3:	Num primeiro momento parece ser o perfil de uma pessoa até acima dos ombros sobre uma espécie de morro coberto por copas de árvores.
Estudante 4:	Rosto de menino; pena; onda.
Estudante 5:	Rosto de perfil; onda.
Estudante 6:	Uma senhora com uma pena na cabeça, casaco de pele e véu na cabeça.
Estudante 7:	Uma pessoa (mulher) de cabelos pretos, com um véu branco.

Verificou-se, a partir do protocolo constante no quadro 1, que apenas um dos investigados respondeu que havia duas imagens. Embora seja uma figura de ilusão ótica e muitas alternativas poderiam ser dadas, as respostas parecem corroborar o que Piaget e Inhelder (1993) indicaram como sendo percepção o conhecimento dos objetos resultante de um contato direto com eles. Isso foi o que ocorreu, pois o investigador nada informou sobre a imagem fornecida aos alunos.

Como a intenção do investigador era verificar se os professores investigados tinham o espaço perceptivo e representativo (visualização) coerentes com o que acreditava ser adequado para o nível

3 As transcrições dos alunos são literais

de conhecimentos deles e para motivar a sequência do curso que se iniciava, propôs a representação da *Figura 4*, a seguir.

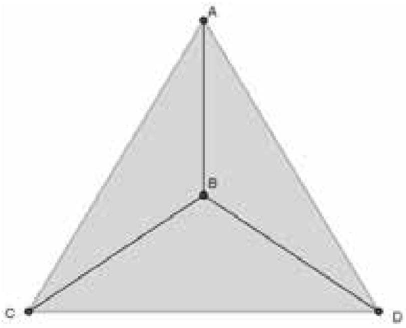


Figura 4. (Triângulos ou Tetraedro). Construção no GeoGebra feita pelo autor.

A experiência e pesquisas do investigador têm mostrado que estudantes e professores não conseguem interpretar (visualizar) e descrever corretamente certas representações geométricas. Também não o fazem de forma convincente. Na maioria das vezes, as representações são fornecidas aos alunos por reproduções xerografadas ou visualizadas em livros didáticos ou meios digitais. Além disso, descrevem oralmente o que a imagem representa ou que o próprio professor deseja que ela represente, o que vai de encontro ao que Fazenda et al. (2006) afirmam sobre descrição, não desenvolvendo nos indivíduos habilidades visuais, pois eles passam a "ver" com o olhar do professor e não pela própria construção.

Quadro 2. Protocolo das descrições da figura 4.

Estudante 1:	Figura geométrica composta por mais três figuras; três vértices, três lados, ângulos, figura plana, figura espacial.
Estudante 2:	Uma pirâmide de base triangular ACD.
Estudante 3:	Um triângulo de medidas laterais iguais e com um centro marcado pelo ponto B, dando uma ideia de profundidade para observar as faces laterais e a base da figura.
Estudante 4:	Vértices; segmentos de reta; triângulos.
Estudante 5:	Pirâmide de base triangular; pontos; vértices; faces laterais.
Estudante 6:	Um tetraedro; um triângulo com o seu centro marcado. Três triângulos.
Estudante 7:	Primeiramente seria um tetraedro, onde a base é o triângulo BCD e vértice A. Mas para isso deveríamos ter as arestas BC e BD pontilhadas e não contínuas, para imaginarmos um sólido e não 3 triângulos ABC, BCD e ABD com o vértice B em comum.

O protocolo anterior indica que os estudantes visualizam uma representação de objeto espacial e não uma possibilidade de representação formada exclusivamente por triângulos planos.

A figura 4 poderia estar representando quatro triângulos planos: ABC, ABD, BCD, ACD, sendo que o último não foi reconhecido por nenhum dos alunos, nem mesmo pelo estudante 7, que melhor discorreu sobre a representação. Esse estudante cogita de ser um tetraedro, mas para tal exige que as arestas deveriam ser pontilhadas, o que não é correto para essa situação, pois todas as arestas seriam visíveis.

O estudante 6 é o único que indica a possibilidade de a representação ser de um objeto plano e também de um espacial. Ao afirmar que há três triângulos representados, não considera o triângulo ACD, que, no caso da representação ser de tetraedro, corresponderia à face lateral que se encontra invisível.

O estudante 5 visualiza objeto espacial, apenas citando elementos constituintes do mesmo e não o descreve, de forma similar ao feito pelo estudante 4, enquanto que o de número 2 percebe a representação de uma pirâmide, vista de cima, em que visualiza a base como o triângulo ACD e vértice B.

Os estudantes 1 e 3 percebem na representação a presença de uma figura espacial e indicam elementos constituintes da mesma.

Concluindo

Ao término do artigo indica-se que a análise dos protocolos com a descrição feita pelos investigados pode indicar que eles apresentam alguma percepção de representações geométricas, estando mais presentes as de objeto espacial. Acredita-se que isso tem a ver com o fato dos interiores das regiões triangulares terem sido pintados e não apenas pelos segmentos da fronteira, caso em que ficaria mais evidente a representação de polígonos e não regiões poligonais. Este é um ponto a ser investigado em pesquisas futuras.

Por sua vez, fica evidente a afirmação de Piaget e Inhelder (1993) de que a representação do espaço não é dada a priori, mas é construída e que difere da percepção, que é imediata. Além disso, a visualização, por não ter fim em si mesma e, sim, ser um meio para alcançar esse fim, ou seja, a compreensão e o desenvolvimento visual, nas palavras de Zimmermann e Cunningham (1990), a difere de ilusão ótica.

Existem representações geométricas, como a das figuras 5, 6 e 7, a seguir, que parecem auxiliar na aquisição dessas habilidades visuais. Na primeira delas, o comprimento vertical, à primeira vista, parece muito maior do que o horizontal, entretanto os dois são de mesmo comprimento, como pode ser verificado por medições. Nesse sentido, o uso das tecnologías computacionais poderia ser uma ferramenta para auxiliar no desenvolvimento da habilidade visual, comprovando as hipóteses formuladas com construções geométricas adequadas.

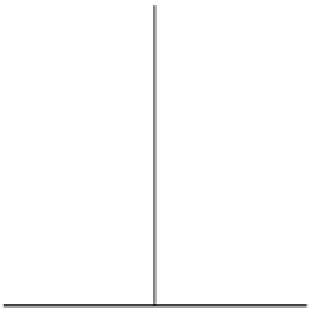


Figura 5. Linha vertical aparentando ser mais comprida do que a horizontal. Construção do autor.

Os três quadrados apresentados na figura 6 têm a mesma medida de lado. Entretanto, as divisões feitas pelos três tipos de linhas dão a impressão errada de que possuem medidas diferentes para os lados. Colocando-se um abaixo do outro, a ilusão de qual é o maior é diferente da disposição na figura. Novamente, construções geométricas, ou utilizando tecnologias computacionais, ou com régua, esquadro e compasso podem proporcionar as comprovações ou refutações do observador.

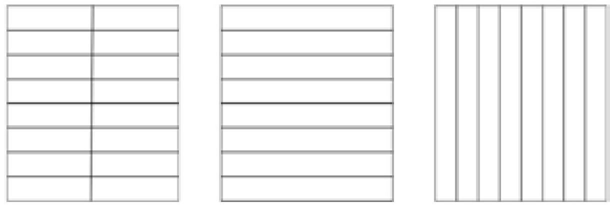


Figura 6. Quadrados. Adaptado pelo autor de Luckiesh (1965).

Na figura7, a seguir, considera-se a distância horizontal entre os pontos exteriores às três circunferências, arranjadas tangencialmente, e a distância (o espaço vazio) entre a circunferência superior e a da esquerda do grupo das três. Ilude-se aquele que interpretar como sendo maior a distância vertical do que a horizontal, pois ambas apresentam o mesmo valor, novamente podendo ser utilizados recursos materiais ou computacionais para a comprovação.

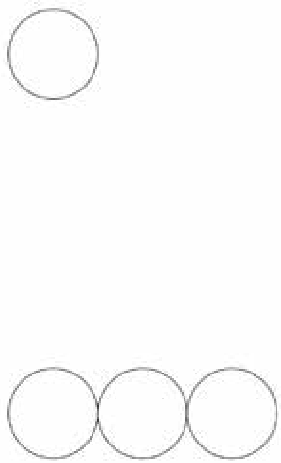


Figura 7. Circunferências. Adaptado pelo autor de Luckiesh (1965).

Entende-se que os aspectos visuais, como construtos mentais, apresentam lacunas na formação inicial dos indivíduos, as quais não mais deveriam existir para o nível de formação em que os investigados se encontram. A pesquisa evidenciou que é necessário desenvolver a habilidade de visualização, conforme as investigações feitas por Hoffer (1977) sobre discriminação e memória visual nos estudantes, ao longo de sua formação inicial, acadêmica e em ação continuada, para que possam desenvolver representação em Geometria.

REFERÊNCIAS

Andrade, J. & Nacarato, A. *Tendências didático-pedagógicas no ensino de geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs.* Educação Matemática em Revista, 17, 61-67, 2004.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática.* Brasília: MEC/SEF, 1998.

Costa, C. . (2000). *Visualização, veículo para a educação em geometria*. Disponível em: <httpwww.spce.org.ptsemCC.pdf.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2007

Eizenberg, T. & Dreyfus, T. (1990). On the reluctance to visualize in mathematics. In: W. Zimmermann & S. Cunningham. *Visualization in teaching and learning mathematics*., S. (ed.). USA: Mathematical Association of America, pp.25-37.

Fazenda, I. et al. (2006). *Metodologia da pesquisa educacional*.-10. ed.- São Paulo: Cortez.

Gutierrez, A. & Boero, P. (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers.

Del grande, J. (1994). Percepção espacial e geometria primária. In: M . Lindiquist & A. Shulte, (Orgs.). *Aprendendo e ensinando geometria.* São Paulo: Atual,. pp. 156-167.

Kilpatrick, J. (1994). Investigación em educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. In: J. Kilpatric, L. Rico & P. Gómez (Eds.). *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica. pp.1-18.

Leivas, J. (2009). *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática*. Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

Le Golf, J. (1994). Desargues et la naissance de la géomètrie projetive. In: *Desargues en son temps*. Paris: Éditions Albert Blanchard, pp. 157-206.

Luckiesh, M. 1965. *Visual illusions: their causes, characteristics & applications*. New York: Dover Publications.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1993). *A representação do espaço na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Princípios e Normas para a Matemática Escolar. (2008). *Tradução dos Principles and Standards for School Mathematics*. Lisboa: APM

Santos, L. (2011). *Anamorfoses no ensino de Matemática. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação*. Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande.

Semmer, S. (2013). *Ensino de Geometrias Não-Euclidianas usando Arte e Matemática. Dissertação de Mestrado*. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1990). *Visualization in teaching and learning mathematics*. USA: Mathematical Association of America,

9. Sed de aprendizaje del ser humano, un proceso histórico

Gustavo Adolfo Trujillo Hurtado[1]
Christian Eduardo Ticora León[2]

Introducción

No es difícil verificar que el ser humano desde sus orígenes ha tenido una sed insaciable por dar respuesta a los interrogantes que pasaban por su cabeza en el día a día. De esta manera, las formas que ha utilizado en pro de lo mismo no son como muchos creerían, las mismas; al contrario, dichas formas de buscar respuestas han ido variando según el momento histórico en el que se ha encontrado el ser humano. A grandes rasgos, el ser humano ha reconocido como cierto que, en la medida que logre dar una interpretación de lo observado en su entorno, podrá responder sus interrogantes.

Es por esto que cuando se hace una revisión histórica, a grandes rasgos, la primera forma por medio de la cual el ser humano buscó dar una interpretación de su realidad fue a través del arte, iniciando con el "arte rupestre", visto como lo plantean Diego Martínez y Álvaro Botiva:

> En su paso por el mundo, el hombre ha dejado plasmadas en cuevas, piedras y paredes rocosas, innumerables representaciones de animales, plantas u objetos; escenas de la vida cotidiana, signos y figuraciones geométricas, etc., obras consideradas entre las más antiguas manifestaciones de su destreza y pensamiento (2004, p. 15).

Más tarde, la creación de mitos sigue en esta línea direccionada a dar respuestas que generen en el individuo una mayor tranquilidad frente a su existencia. Es así como el protagonismo de dichas formas para buscar la verdad va pasando 'de mano en mano', para luego situarse en la religión, la cual a su vez más adelante le pasa dicha responsabilidad a la ciencia, siendo esta última la encargada de llevar este compromiso en la actualidad.

Curiosamente, este deseo incesante en el ser por descifrar 'lo que ve' ha sido trasmitido a través de cada generación sin restricción alguna, intergeneracionalmente surgen preguntas características a través de la trasmisión de saberes de los antecesores, y son dichas preguntas las que garantizan que la tan nombrada búsqueda de la verdad no se detenga, dejando clara la importancia radical que representa la trasmisión de saberes en un entorno social determinado.

En esta medida, por parte de los integrantes de una comunidad se descubre la importancia de que dicha acción de *compartir los saberes* se realice de la manera más fructífera en aras de generar un bien común. Esto hace alusión al hecho de lograr formar en el individuo habilidades pertinentes para la comunidad en cuestión, puesto que de esa manera se garantizaba un mayor aporte hacia la comunidad originada en cada integrante de la población específica.

Cabe resaltar que dicha labor fue realizada, en primera instancia, por los comúnmente denominados 'ancianos de la comunidad'. Hay que decir que se alude a la época histórica en la que el ser humano habitaba en tribus, en las cuales se daba un gran valor al integrante más viejo. Dichos ancianos eran los portadores de mayor cantidad de experiencias recolectadas debido a la cantidad de años vividos, siendo este último aspecto el eje determinante para otorgarle dicha función dentro de la comunidad.

Ahora bien, así como se designaba una persona para realizar la labor de enseñar a sus prójimos, se escogía un lugar en particular en el cual se realizaba la labor mencionada. De la misma forma, hoy en día la persona encargada de compartir su saber con los demás no es necesariamente la portadora de más años vividos y los lugares para llevar a cabo esta acción no son los mismos. En sus primeros momentos, este tipo de acciones se realizaban en el

1 Licenciado en Matemáticas de la Universidad del Tolima. e-mail: gustwizard@gmail.com
2 Licenciado en Matemáticas de la Universidad del Tolima, Especialista en Pedagogia de la Universidad del Tolima e-mail: im.christian-25@hotmail.com

lugar en donde se encontrase *el orador* (el anciano). A la fecha, esta acción se realiza en un lugar en donde convergen las personas que van a enseñar y las personas que van a aprender. Dicho lugar es *la escuela*.

La escuela es el lugar en el cual se plantean las condiciones necesarias para llevar a cabo la labor de educar y es ahí donde se encuentran profesores y estudiantes. Pero surge un interrogante: ¿actualmente, se puede considerar que la escuela es el lugar en el cual se garantiza a los estudiantes encontrar respuestas a las preguntas que le rondan en su día a día? La respuesta es no, aunque cada estudiante tiene sus preguntas propias, la escuela pareciese que solo ofrece una mirada de la realidad.

Como lo representa Jaume Trilla (1993), "se fue imponiendo, en materia educativa y pedagógica, el paradigma aislacionista, con instituciones educativas que parecen estar por fuera de la realidad. Extrañas utopías que deben funcionar, además, como ucronías, -es decir, sin lugar y sin tiempo"- (p. 180). Se evidencia la creación de una realidad alterna a la propia del estudiante, una realidad, en la cual, las preguntas centrales giran en torno a temas que, en la mayoría de los casos, no le son familiares a los estudiantes.

Así, la escuela en vez de dar herramientas para buscar respuestas pareciese que busca vendar los ojos de sus integrantes para, de esta manera, evitar el planteamiento de preguntas y, en caso de presentarse alguna, entonces ésta deberá ser superflua a las necesidades que generen una verdadera intriga en el estudiante, puesto que ello representaría enfrentarse a una persona indagadora.

De esta manera, se evidencia una intención que, lejos de propiciar el desarrollo de habilidades propias de un pensamiento crítico en el estudiante, apunta a establecer un control de la persona:

> Las ilusiones planteadas por el cristianismo, por el liberalismo, y por el socialismo, sobre el amor al prójimo, el respeto por los derechos fundamentales de los individuos, la equidad y la distribución de las riquezas, han fracasado. Pareciera que solo subsiste el control generalizado sobre los cuerpos y la "fabricación de sujetos" adaptados mediante el rigor, la educación para la subalternidad y la violencia (Carrión, 2005, p. 21).

De esta manera, se alude a la escuela no como un lugar en el cual se persigue el ideal de instruir a una persona para que logre adquirir herramientas que contribuyan para su crecimiento personal y el bienestar colectivo. Por el contrario, se evidencia la escuela como un lugar de adoctrinamiento, en donde la mayor prioridad es generar en la persona actitudes de obediencia. Actitudes que son propias para desempeñarse en un modelo laboral en el que se aprecia a quien menos refute o interponga ideas.

En otras palabras, el sistema educativo actual hace de las escuelas un lugar de "entrenamiento" para lo que será luego el contexto laboral actual:

> se plantea la necesidad de formar, desde las aulas, trabajadores competitivos y polifuncionales, que abandonen toda perspectiva de obtener contratos estables que renuncien a la estabilidad y a la seguridad social, pero que persistan en el anhelo de incrementar el consumo y de asumir la búsqueda de los conocimientos como principio rector de toda competencia (Carrión, 2005, p. 47).

Así pues, el conocimiento deja de ser el mecanismo por el cual una persona busca interpretar la realidad que lo rodea en su entorno y se convierte en un elemento más de la lista para aspirar a una vida laboral fructuosa, para poder suplir esas supuestas necesidades que se le han venido atribuyendo al estudiante como suyas durante su paso por la escuela.

De esta manera se hace un cambio total en la razón de ser de la educación al tornarse como esa herramienta capaz de arrebatar las aspiraciones y deseos innatos del ser humano, para reemplazarlos por deseos previamente escogidos por un ente externo que generalmente es el Estado, ente que a través de *Aparatos Ideológicos* y *Aparatos Represivos* busca mantener un control sobre los integrantes de una comunidad, soslayando el bienestar del individuo y el de sus "iguales".

Es así como se aprecia, por parte del Estado, todo mecanismo que ayude a cumplir la tarea anteriormente expuesta:

> Hoy la vida entera pretende ser escolarizada, sometida a las rutinas de la escuela, hay un nuevo "orden" del tiempo, nuevas condiciones de existencia, basadas en calendarios, horarios y rutinas. Todo esto ha llevado a que la escuela y el maestro carezcan de identidad propia; cualquier espacio puede sustituir la escuela y cualquier individuo puede improvisarse como "educador" (Carrión, 2005, p. 52).

Como lo afirma Theodor Adorno (1969), "cualquier debate sobre ideales de educación es vano e indiferente en comparación con este: que Auschwitz no se repita. Fue la barbarie, contra la que se dirige toda educación" (p. 7).

Al mismo tiempo,

> La intensidad misma de la disputa por el reconocimiento del carácter de cientificidad de un saber es, a nuestro juicio, una clara manifestación de cientificismo. Este constituye una relación cultural específica con las ciencias, caracterizada por un desconocimiento de los límites del campo de validez de las teorías y de los procedimientos de las ciencias y por una fe irracional en el valor de cuanto logre presentarse como científico, ha sido constatado y analizado desde diversas perspectivas (Habermas, 1984, p. 93).

Por todo lo anterior debe resaltarse la importancia que posee un educador al poder propiciar pautas que ayuden a los alumnos a describir su realidad mediante herramientas poderosas como por ejemplo las matemáticas, que ayuden a modelar los diferentes contextos en los que se ve inmerso un alumno y así contribuir a la acción de desarrollo de la comunidad.

A propósito de lo anterior, Ole Skovsmose (1999) explica que los procesos de globalización demandan un alfabetismo para los y las integrantes de una comunidad, de tal forma que estos (as) se desenvuelvan en la misma por medio de un alfabetismo funcional y crítico.

Es por ello que los (las) ciudadanos (as) de una comunidad deben desarrollar el saber matemático, para poder acompañar los procesos de globalización y desarrollo de la misma. Es importante que alumno reciba una alfabetización con el fin de implementar lo que llama Skovsmose (1999) reconoce como *herramientas poderosas* para poder clasificar, simbolizar y caracterizar los objetos de la vida real, haciendo uso de su conocimiento funcional. También el sujeto debe estar dispuesto a repensar sus acciones y a plantear preguntas sobre su situación actual mediante la crítica.

Un estudiante con capacidades matemáticas adquiere herramientas para validar y modelar los eventos de su diario vivir, tal como lo pone en evidencia Gutiérrez (2008), quien plantea la pertinencia de ver las ciencias matemáticas y físicas en contexto dando solución a situaciones diarias, propiciando así un mejor manejo de estas ciencias y la formación de un pensamiento abstracto para situaciones reales.

Por lo anterior, es claro que una persona con pensamiento matemático percibirá con una mirada más amplia su realidad, podrá describirla, predecir eventos y estar preparado gracias a los números y la estadística. Pero debe tenerse en cuenta que las matemáticas no solo forman personas sino también las demás disciplinas que envuelven el saber humano, y que debe haber una armonía entre las disciplinas para una buena formación.

Es por ello que existe un gran reto a educar y lograr formar no solo matemáticos sino personas para una sociedad. (Savater, 1997). Se deben reformular las formas de enseñanza y aprendizaje siendo creativos e interactivos, incorporando a la familia o núcleo familiar como parte primordial en los procesos de enseñanza, pues esta es la primera en educar al infante. Esto denota que la educación no la crean los educadores, la hace cada una de las personas involucradas y, por tanto, la responsabilidad de educar es de todos(as).

REFERENCIAS

Adorno, T. (1969). *La sociedad: Lecciones de sociología*. Buenos Aires: Editorial Proteo

Carrión, J. (2005). *Pedagogía y regulación social*. Bogotá: El Poira.

Gutiérrez, C. (2008). *Otra forma de enseñar y aprender Física. Comunidad escolar*. Madrid: Ministerio de Educación, Política Social y Deporte.

Habermas, J. (1984). *Ciencia y técnica como "ideología*" (Vol.4). Madrid: Tecnos.

Savater, F. (1997). *El valor de educar*. Barcelona: ed. Ariel.

Skovsmose, O. (1999). Hacia una filosofía de la educación matemática crítica. En: *Revista Ema*. Vol. 2, Nº 3.

10. Procesos de generalización a partir del estudio en el aula de los conectores lógicos de Peirce

César Guillermo Rendón Mayorga[1]

Introducción

Este artículo describe algunas actividades hechas en la práctica de inmersión docente de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, la cual se desarrolló en el Instituto Pedagógico Nacional (IPN). La práctica en mención se llevó a cabo con estudiantes de grado undécimo en la asignatura de Probabilidad, materia que se aborda en el colegio desde el aprendizaje de la teoría de conjuntos. En este documento se detallará la manera como se enseñan los conectores lógicos en la institución, posteriormente se comentarán los aportes relacionados al uso de los conectores lógicos de Peirce en el aula, así como los resultados arrojados.

Antecedentes

En principio conviene hacer un recuento breve sobre el estudio de las proposiciones en la escuela. Normalmente, las proposiciones se estudian en el aula a partir de ejemplos verbales, las operaciones entre éstas se trabajan utilizando tablas de verdad con los valores de verdadero (V) y falso (F), también se implementa la simbología usual de los conectores entre proposiciones: para la conjunción, para la disyunción, la implicación, para la equivalencia, ¬ es el símbolo de negación y el de la disyunción exclusiva.

Parte del trabajo que se lleva a cabo en el IPN consiste en cambiar la notación de los conectores lógicos y emplear símbolos diferentes a V y F para los valores de verdad. Lo anterior se hace así: a cambio de V y F para los valores de verdad, se usan los números 0 y 1 del sistema binario, los cuales corresponden a verdadero y falso respectivamente. Esto genera que las tablas de verdad tengan otro aspecto, como se ve en el siguiente ejemplo para la conjunción:

P	∧	*q*	
V	V	V	
V	F	F	
F	F	V	
F	F	F	

Tabla de la conjunción usando notación clásica.

p	∧	*q*
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	1	1

Tabla de la conjunción usando notación binaria

Considerando que es posible hacer 16 combinaciones diferentes de cuatro elementos con 0 y 1, se concluye que existen 16 maneras distintas de operar proposiciones. Así, por ejemplo, el número 0001 representa la disyunción, en tanto solamente es falsa cuando el antecedente y el consecuente son falsos. El 0100 corresponde a la implicación porque sólo es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, etc.

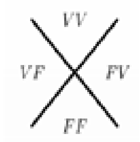
Notar que la columna central de la tabla, con el número 0111, es el número 7 escrito en base dos, por lo cual la *conjunción* recibe el nombre de *operación 7* (análogamente se generan las operaciones 0, 1, 2,…, 15). Esta manera de presentar los conectores lógicos usando el sistema binario ha propiciado que sean los muchachos quienes descubran por sí mismos que existen más operaciones entre proposiciones además de las clásicas.

1 Estudiante de Licenciatura en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. e-mail: dma_crendon201@pedagogica.edu.co

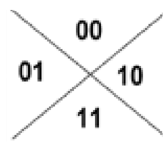
A continuación se presentan los conectores de Peirce, la manera como se trabajaron en el salón y los resultados obtenidos.

Los conectores lógicos de Peirce en el aula de clase

La idea esencial de Peirce es que el símbolo de un conector refleje algunas de sus propiedades matemáticas. Para lograrlo, el método que propone para representar los conectores tiene, como se puede ver las tablas de verdad, cuatro filas en las que aparecen los valores de verdadero o falso. Cada fila tiene una posible combinación de estos valores (VV, VF, FV, FF). Con esta idea en mente se dibuja una "X" y en cada *sección* de la X se coloca una de las posibles combinaciones entre verdadero y falso, obteniendo la siguiente figura:

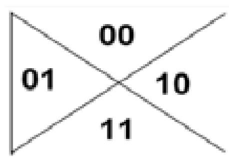


Representación de Peirce con los símbolos clásicos



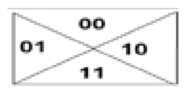
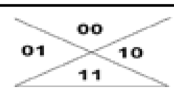
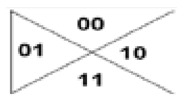
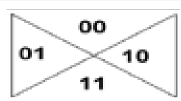
Representación de Peirce con símbolos del sistema binario.

Cuando una de las combinaciones resulte falsa, se cierra el cuadrante correspondiente con un segmento. Por ejemplo, para representar el conector de la *operación 4* (0100 en base dos) que es la misma implicación y resulta falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, esto es el caso 01, entonces el conector Peirce es:



Conector 4 (implicación) en representación de Peirce.

En efecto, se puede ver que se traza un segmento en 01 porque en la tabla de verdad este caso es el único que resulta falso. Replicando el procedimiento para cada uno de los 16 conectores lógicos, se obtienen 16 símbolos de Peirce. La siguiente imagen ilustra los conectores de Peirce para algunas de las operaciones entre proposiciones:

Nombre de la operación	Valor de verdad en el sistema binario	Conector aristotélico	Conector de Peirce
Conjunción	0111		
Disyunción	0001		
Implicación	0100		
Bicondicional	0110		

La presentación de estos conectores se hizo en una sesión de clase en la cual los estudiantes dibujaban cada conector según la indicación y los asociaban con su operación correspondiente. Una vez que se familiarizaron con los conectores de Peirce se les solicitó devolverse a las tablas de verdad con sistema binario y se les pidió que mencionaran dos operaciones que fueran conmutativas (esto es, que operar 0 con 1 resulte igual que operar 1 con 0). Ante esto, la mayoría de estudiantes nombraron las operaciones 0 (0000) y 6 (0110). A continuación, se les pidió dos operaciones que fueran idempotentes (esto es, que operar 0 con 0 tenga el mismo resultado que operar 1 con 1), y nombraron las operaciones 4 (0100) y 9 (1001).

Con base en lo anterior se les propuso la siguiente actividad grupal:

- En relación con las operaciones conmutativas y sus respectivos conectores de Peirce, establezcan un criterio para determinar, sólo a partir del conector, cuándo una operación es conmutativa.

- De forma análoga al ítem anterior, establezcan un criterio para determinar cuándo una operación es idempotente a partir del conector de Peirce.

- Siguiendo la misma línea de los ítems anteriores, generen un criterio que determine cuándo una operación es unipotente[2] a partir del conector de Peirce.

La actividad permitió que emergiera un espacio de discusión entre los (las) estudiantes en el cual realizaron procesos de discriminación (para establecer cuáles conectores cumplen una propiedad y cuáles no) y de generalización (para notar la característica común en los conectores conmutativos, en los idempotentes y en los unipotentes). Finalmente, se institucionalizaron en la clase todos los hallazgos y se establecieron los criterios:

- ✓ Si el conector de Peirce es abierto a ambos lados o cerrado a ambos lados, entonces la operación que representa es conmutativa (las operaciones 0, 1, 6, 7, 8, 9, 14 y 15).

- ✓ Si el conector de Peirce está abierto arriba y abajo, o si está cerrado arriba y abajo, entonces la operación que representa es idempotente (las operaciones 0, 2, 4, 6, 9, 11, 13 y 15).

- ✓ Si el conector está cerrado abajo y abierto arriba, implica que la operación que representa es unipotente (las operaciones 1, 3, 5 y 7).

Esta actividad posibilitó la inclusión de una temática normalmente no abordada en el aula de clase, la cual propició el desarrollo de procesos lógicos en los estudiantes.

Conclusiones

La realización de este trabajo permitió comprobar, en primer lugar, que sí es posible *construir matemáticas* en el aula de clase (elementales, pero matemáticas al fin). También se pudo evidenciar cómo la introducción de distintos tipos de representación para un objeto matemático puede facilitar procesos lógicos como generalizar, inducir y deducir.

Finalmente, se quiere mencionar que en la actualidad continúa este trabajo en el IPN y que algunos estudiantes han desarrollado criterios para determinar propiedades como la asociatividad, el elemento neutro, inversos, etc. Especiales agradecimientos a la profesora Margarita Rojas de Roa, asesora de esta práctica docente, al profesor Irwin Medina Meléndez, docente titular del IPN y, principalmente, a los y las estudiantes del IPN de grado undécimo (promoción 2014), por su colaboración en las actividades propuestas.

2 Se considera aquí una operación unipotente cuando al operar 0 con 0 el resultado es 0, y al operar 1 con 1 el resultado es 1.

REFERENCIAS

Morera, J., Hurtado, C., y Jiménez, W. (2012). *Una propuesta alternativa para la enseñanza de la teoría de conjuntos*. En G. Obando, Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 1266-1271). Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Oostra, A. (2004). La notación diagramática de Peirce para los conectivos proposicionales binarios. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias*, 28(106), 57-70.

Oostra, A. (2011). *La lógica gráfica de C.S Peirce*. Memorias del XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Zalamea, F. (1993). *Una jabalina lanzada hacia el futuro: anticipos y aportes de C.S Peirce a la lógica matemática del siglo XX*. Mathesis - Universidad Nacional de Colombia, 9, 391-404.

11. Las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en Matemáticas: reflexiones de una indagación en el aula

William Eduardo Naranjo Triana[1]
María Angélica Triana Tobar[2]

Resumen

El objetivo de este artículo es mostrar cómo la indagación en el aula real de matemáticas ayuda al profesor a identificar problemáticas en la enseñanza y el aprendizaje, con el fin de buscar estrategias encaminadas a la superación de esas problemáticas y, en últimas, a la transformación real de la enseñanza de las matemáticas. Este trabajo coincide con el momento de realización de la práctica docente en el grado décimo por parte de la autora, quien intenta abordar la enseñanza del concepto matemático de *razón trigonométrica.* Con este trabajo de indagación en el aula—bajo el enfoque metodológico de *investigación acción*—se pudo identificar que una enseñanza de las matemáticas basada en la explicación de fórmulas y algoritmos, para que los (las) estudiantes repitan y practiquen a través de ejercicios, produce muchas dificultades de aprendizaje y genera poca comprensión conceptual de las razones trigonométricas y de las matemáticas en general. En consecuencia, se propone una enseñanza de la trigonometría donde el estudiante tome un papel más activo a través del trabajo experimental, con la ayuda de GeoGebra, para que logre descubrir y comprender conceptos matemáticos.

Definición de la problemática

La enseñanza de la trigonometría tradicionalmente está basada en la presentación de algoritmos y fórmulas que se les presentan a los (las) estudiantes, para manipular objetos que no saben qué significan, para hallar respuestas a problemas que no entienden. El currículo que opera en estas aulas de clase es un *currículo por objetivos*, en el que el profesor cumple el papel de experto que explica una serie de fórmulas y algoritmos para que los (las) estudiantes repitan y practiquen a través de ejercicios prefabricados[3] hallados en textos guía. Mi experiencia como profesor en formación inicial muestra que esta forma de abordar la enseñanza de las matemáticas no funciona; por el contrario, produce muchas dificultades de aprendizaje en los (las) estudiantes. Como una consecuencia inobjetable, los (las) estudiantes muestran poco interés y motivación por aprender matemáticas ya que, la mayoría de las veces, no le encuentran sentido a lo que hacen en esta disciplina.

El foco disciplinar de este trabajo son las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de ángulos agudos ya que, en palabras de Sicre et al. (2007), el tratamiento de estas razones resulta ser, de cierta manera, representativo de los demás casos y fácilmente transferible a casos más complejos. Además, las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo constituyen la base fundamental de los demás conceptos en trigonometría, pues resulta evidente que una pobre comprensión de las razones trigonométricas produce grandes dificultades en el aprendizaje de conceptos más complejos de la trigonometría. En este orden de ideas, para el desarrollo de este trabajo se tendrá en cuenta un proceso de aprendizaje a través de la indagación en el aula, en aras de comprender las necesidades de aprendizaje de un grupo de estudiantes cuando se encuentran resolviendo triángulos rectángulos haciendo uso de las razones trigonométricas.

Marco referencial. Dificultades y errores en el proceso de comprensión de las razones trigonométricas

Realizando una búsqueda exhaustiva en bases

1 Estudiante de décimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas (Universidad del Tolima). e-mail: william-105@hotmail.com
2 Licenciada en Educación Básica con énfasis en Lengua Castellana (IDEAD - Universidad del Tolima). Docente de la Institución Educativa Altozano del municipio de Ortega (Tolima). e-mail: mtrianatobar@gmail.com

3 Agudelo-Valderrama (2002) habla de ejercicios prefabricados refiriéndose a aquellos ejercicios que no surgen de ningún contexto y que son propuestos por los textos guía para que los (las) estudiantes practiquen.

de datos en internet, es posible darse cuenta que no existen muchos trabajos acerca de errores y dificultades de estudiantes a la hora de trabajar con las razones trigonométricas. Sin embargo, Arenas et. al (2012) llevaron a cabo un estudio con estudiantes entre los 15 y 17 años, donde pudieron clasificar las dificultades que estos tienen en las siguientes categorías:

1. Dificultad para reconocer, construir y representar propiedades y elementos geométricos asociados a problemas, en los que se involucran las razones trigonométricas.
2. Dificultad para realizar las traducciones entre las distintas representaciones de las razones trigonométricas, a partir de los datos dados en el problema.
3. Dificultad para construir transformaciones sintácticas de las razones trigonométricas en una misma representación, a partir de los datos dados en el problema.

La primera dificultad hace referencia a la estructura conceptual de las razones trigonométricas de un ángulo y las dos últimas a la relación entre los diferentes sistemas de representación.

Matemática experimental

Durante las últimas décadas ha surgido una línea de investigación en educación matemática que se encuentra en estrecha relación con una perspectiva constructivista de los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje. Esta línea sugiere una explicación epistemológica de cómo se hace matemática, es decir, una explicación desde la naturaleza del conocimiento matemático. Este último aspecto constituye un punto clave para decidir lo que sucederá en el aula de clase entre el profesor y los estudiantes pues~~, en palabras~~ de Stenhouse (1991), un proyecto curricular, sin importar el área del conocimiento, debe respetar la naturaleza del conocimiento y vincular este aspecto tanto a la enseñanza como al aprendizaje.

Vasco (1978) argumenta que la producción matemática (es decir, la forma como se hace matemática) parte de actividades, manipulaciones, movimientos. Esta producción activa es análoga al trabajo experimental de otros tipos de producción científica, como por ejemplo el caso de las ciencias naturales. En el proceso de producción matemática, la manipulación y la asignación de significado de símbolos es muy importante, es decir, el uso de cualquier tipo de representación material. Dos aspectos son claves en la postura del profesor Vasco: por un lado, la producción matemática parte de actividades y no de la repetición de algoritmos; estas actividades son, por ejemplo, identificación de regularidades, formulación de hipótesis y conjeturas, manipulación y experimentación con los objetos matemáticos, justificación, demostración, entre otras. Por otro lado, el uso de símbolos para representar objetos matemáticos es de vital importancia en el proceso de producción matemática y, además, el uso de estos surge de manera natural de acuerdo con las actividades (anteriormente mencionadas), llevadas a cabo por el encargado de la producción matemática (los y las estudiantes).

Esta explicación de la forma como se producen los conocimientos matemáticos, trasladada a las aulas de clase, sugiere un cambio radical en los roles que deben asumir el profesor y el estudiante. Este último se convierte en un ente activo ya que él mismo es el encargado de la producción de conocimientos matemáticos, a partir de las actividades estratégicamente diseñadas por el profesor y su orientación a través de preguntas, sin necesidad de decirle al estudiante lo que tiene que hacer.

Las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas

Durante los últimos 20 años, una línea de investigación en didáctica de las matemáticas se ha venido fortaleciendo, a tal punto de que hoy en día son muchos los autores (por ejemplo, Gómez, 1997; Ortíz & Arias, 2012; Artigue, 2007; entre otros) que defienden su pertinencia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Ortíz y Arias (2012) comentan que una de las ventajas que ofrece el uso de las TIC en el aula de clase es la posibilidad de implementar una perspectiva constructivista de la enseñanza de las matemáticas, lo cual resulta coherente con el enfoque experimental de la enseñanza de este trabajo.

Por otro lado, Gómez (1997) subraya que el uso de las TIC para la enseñanza de las matemáticas posibilita a los (las) estudiantes la manipulación dinámica de los objetos matemáticos en distintos sistemas de representación, lo cual a su vez permite vivir nuevas experiencias matemáticas que resultarían difíciles y engorrosas a través de medios tradicionales como el lápiz y el papel. Además, otra ventaja de las TIC es que permiten la creación de ambientes de exploración, promoviendo de esta manera un enfoque experimental del proceso de producción matemática.

El software educativo GeoGebra, además de ser un software libre, de fácil acceso, con una interfaz bastante sencilla, posibilita la experimentación en matemáticas gracias a que permite la iteración de las manipulaciones sobre los objetos matemáticos, lo cual se constituye en un aspecto fundamental para el proceso de experimentación en matemáticas. La fecundidad del uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas no está en comprobar respuestas, sino más bien en construir conceptos matemáticos a través de la exploración, la experimentación, el uso de símbolos, la formulación y comprobación de conjeturas, entre otros procesos típicos del pensamiento matemático.

Metodología

Para llevar a cabo este proyecto de indagación en el aula, se propone trabajar bajo el enfoque de investigación-acción (IA), pues éste se constituye en una potente herramienta para el perfeccionamiento profesional del profesor, es decir, el perfeccionamiento de la autonomía y el juicio profesional del docente, para tomar decisiones acerca de su trabajo en el aula real de matemáticas. Además, el enfoque de IA surge en oposición a la metodología tradicional en investigación educativa, donde los encargados de hacer investigación son expertos altamente cualificados para esto, pero ajenos al aula real de clases. Esto produjo una brecha enorme entre teoría y práctica, es decir, entre investigación y enseñanza, pues la teoría que se producía estaba lejos de llegar a las aulas de clases y beneficiar a los que, en teoría, dice servir la investigación educativa: a los profesores.

Martínez (2000) describe brevemente el proceso de indagación en el aula (investigación-acción) como un medio para identificar uno o más problemas de las prácticas de enseñanza del profesor, elabora un plan de acción, lo pone en marcha, evalúa la eficacia del plan de acción en la superación del problema inicial y posteriormente repite este ciclo cuantas veces sea necesario. Por estas razones considero que el enfoque de IA es pertinente para la metodología de este trabajo y, además, es oportuno para el perfeccionamiento de las propias prácticas de enseñanza como docente en formación inicial.

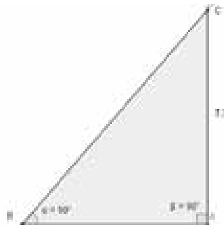
“Enseñanza” inicial de las razones trigonométricas

En primer lugar se comenzará describiendo la forma como decidí abordar la “enseñanza” de las razones trigonométricas. Considero que es importante mencionar este aspecto, pues permitirá en una fase ulterior identificar el proceso de evolución de las propias prácticas de enseñanza y, en cierta medida, rastrear posibles causas de las dificultades y necesidades evidenciadas por los estudiantes, con el propósito de diseñar un plan de acción que coadyuve a la superación de la problemática identificada anteriormente.

El tema de las razones trigonométricas lo comencé explicando conceptos como ángulo agudo, cateto opuesto y cateto adyacente. Vale la pena aclarar que antes de comenzar con el tema de las razones trigonométricas, los estudiantes habían estado trabajando el teorema de Pitágoras, sistemas de medida angular y conversiones entre ellos, y otros conceptos básicos de trigonometría. Posteriormente, se escribieron en el tablero las seis razones trigonométricas y se plantearon varios ejercicios de solución de triángulos rectángulos, con el fin de explicar la forma como se usaban las razones trigonométricas, principalmente seno, coseno y tangente. Finalmente, se explicaron de la misma forma las funciones trigonométricas inversas (sen^{-1}, cos^{-1}, tan^{-1}) y su uso para hallar ángulos internos de un triángulo. Después de esto, se propuso un taller a los (las) estudiantes para que practicaran resolviendo ejercicios y problemas asociados a las razones trigonométricas.

Identificación de dificultades y necesidades de los estudiantes

Con el fin de identificar algunas concepciones erradas que tienen los (las) estudiantes acerca de las razones trigonométricas, se aplicó un test que constaba de tres ítems, justo después de haber explicado el tema de razones trigonométricas: el ítem A propone resolver un triángulo rectángulo dado el valor de un ángulo agudo y la longitud del cateto opuesto a este ángulo; el ítem B pide construir y resolver un triángulo rectángulo dada una razón trigonométrica, en particular tangente; por último, el ítem C propone resolver un problema asociado a las razones trigonométricas, incluyendo el concepto de ángulo de depresión. A continuación se presentan los ítems A, B y C del test de diagnóstico:

Ítem A	Ítem B	Ítem C
 Resuelva el triángulo rectángulo, es decir, halle la longitud de sus tres lados y sus tres ángulos internos.	$\text{Tan (A)} = \frac{5}{3}$ Dada la anterior razón trigonométrica, construya el triángulo rectángulo que la representa y resuélvalo.	Desde el último piso de la Torre Colpatria, una persona observa un automóvil con un ángulo de depresión de 30° ¿A qué distancia se encuentra el automóvil de la base de la torre? Recuerde que la altura de la Torre Colpatria es de 206 metros.

Luego de aplicar este test al grupo de 41 estudiantes, se pudo identificar ciertas dificultades y concepciones erradas que evidencian los (las) estudiantes a la hora de utilizar las razones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos:

- ✓ *Los estudiantes no le encuentran sentido a las respuestas que obtienen:* por ejemplo hallan el valor de la hipotenusa y, por algún error de procedimiento, obtienen un valor incorrecto menor al valor de los catetos; aun así siguen resolviendo el triángulo.

- ✓ *Despejan la incógnita de manera incorrecta:* luego de plantear la razón trigonométrica, tienden a dejar la incógnita a un lado de la ecuación y multiplican los valores conocidos.

$$\boldsymbol{Tan\ 50^\circ = \frac{7,7}{C}}$$

$$\boldsymbol{(7,7).Tan\ 50^\circ = C}$$

$$\boldsymbol{(7,7).1,19 = C}$$

$$\boldsymbol{C = 9,16}$$

- ✓ *Usan de manera incorrecta la notación de la trigonometría:* por ejemplo, conciben la notación Sen (30°) como un producto entre "30" y "Sen", y no como el argumento de la función seno.

$$Tan\ A = \frac{206\ m}{x}$$

$$Tan\ x = \frac{206\ m}{A}$$

$$Tan\ x = \frac{206\ m}{30^\circ}$$

$$Tan\ x = 6.8$$

$$Tan^{-1} Tan\ x = Tan^{-1}\ 6.8$$

$$x = 81,6$$

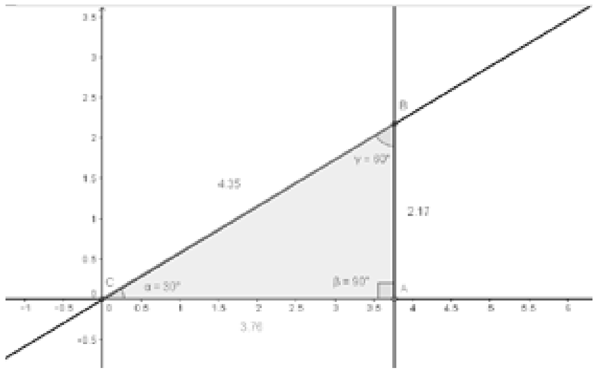
- ✓ *Al usar las razones trigonométricas confunden lados con ángulos:* por ejemplo, escriben Sen A = 206 / 30º

- ✓ *Al usar las razones trigonométricas confunden cateto opuesto con cateto adyacente.*

Estas dificultades y concepciones erradas evidenciadas por los (las) estudiantes, sirvieron de referente y punto de partida para diseñar la secuencia de actividades que más adelante se presentará. Como se puede observar en líneas anteriores, la forma como se abordó la enseñanza de las razones trigonométricas no fue la más adecuada. Muchos estudiantes tuvieron grandes dificultades para comprender las razones trigonométricas y cometieron muchos errores a la hora de resolver triángulos rectángulos. Por un lado, no comprendieron lo que significaba una razón trigonométrica y, por otro, no comprendieron la notación usada en trigonometría. Gracias a este trabajo de indagación en el aula se pudo identificar como problemática la forma de enseñar las razones trigonométricas, pero además se pudo diseñar una secuencia de actividades que busca desarrollar en los (las) estudiantes una comprensión profunda de las razones trigonométricas.

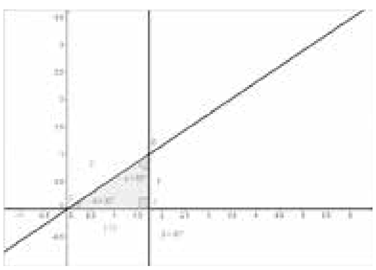
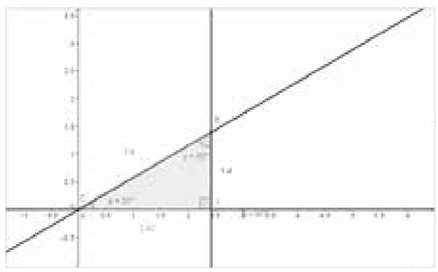
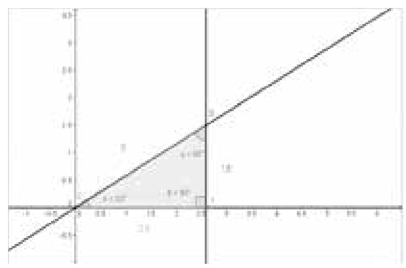
Las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en Matemáticas

Como se vio en líneas anteriores, una enseñanza de las razones trigonométricas—y de las matemáticas en general— basada en la explicación de fórmulas y algoritmos para que los (las) estudiantes repitan y practiquen, genera muchas dificultades de aprendizaje y una baja comprensión de los conceptos matemáticos. Por esta razón, se propone una enseñanza de las razones trigonométricas basada en el trabajo experimental en matemáticas, esto es, en la identificación de relaciones y regularidades entre las longitudes de los lados y la amplitud de los ángulos internos de un triángulo rectángulo. En este enfoque de enseñanza, el estudiante se convierte en un productor de conocimiento matemático más que en un repetidor de fórmulas, definiciones y teoremas. Por su parte, el profesor debe tener un conocimiento profundo de las matemáticas, y motivar a sus estudiantes a indagar y a buscar relaciones entre variables, lo cual implica enseñar a través de métodos de descubrimiento y exploración, y no explicando una serie de definiciones y teoremas.



La actividad comienza presentando el siguiente objeto virtual[4] en el software GeoGebra a los (las) estudiantes. La idea es que ellos(as) puedan identificar que existe una relación entre la longitud del cateto opuesto a 30º y la longitud de la hipotenusa. Se escogió iniciar la actividad con el ángulo de 30º, ya que , lo que implica que la hipotenusa es el doble del cateto opuesto, facilitando la identificación de la relación.

La experimentación con el objeto virtual le permite al estudiante poder observar varios triángulos y comenzar a identificar regularidades,con el fin de formular hipótesis y conjeturas.

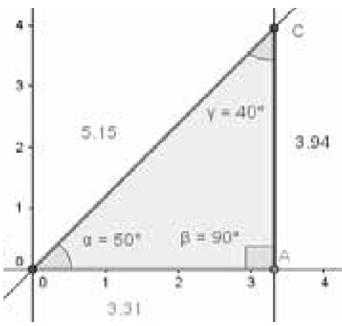




A través de preguntas orientadoras (por ejemplo,al mover el punto “A”, ¿qué varía y qué se mantiene constante en el triángulo ABC?, ¿qué relación encuentras entre la longitud de la hipotenusa y del cateto azul?, ¿se cumple siempre esta relación?, ¿bajo qué condiciones?) formuladas por el profesor sobre proceso experimental que tiene el estudiante con el objeto virtual, se busca que éste sea capaz de comunicar con sus propias palabras que, por ejemplo, “*el cateto que no hace parte del ángulo de 30º es la mitad de la hipotenusa”*[5]. Como se observa aquí, esta conjetura describe fielmente lo que significa la razón trigonométrica “Sen 30”.

4 El punto “A” en el objeto virtual es un deslizador que permite crear varios triángulos rectángulos semejantes entre sí con distintas medidas.

5 Ejemplo de posible conjetura que podría comunicar un estudiante con sus propias palabras.

La segunda parte de la actividad consiste en poner a prueba las conjeturas formuladas por los (las) estudiantes en la fase anterior. Vale la pena decir que el profesor debe tener la habilidad de orientar a los (las) estudiantes a que formulen conjeturas, las registren por escrito y finalmente las pongan a prueba. También debe ser consciente que el proceso de identificar y expresar conjeturas no es inmediato y los (las) estudiantes requieren de tiempo para poder ver una regularidad y expresarla. En este sentido, para la segunda fase de la actividad se les presenta a los (las) estudiantes el siguiente objeto virtual, para que pongan a prueba sus conjeturas, confirmen su validez o, en su defecto, las refuten y reestructuren.



Como se puede observar, esta actividad pretende enseñar a través de métodos de exploración e indagación y no simplemente mediante la explicación de fórmulas y algoritmos descontextualizados. Los (las) estudiantes son quienes producen el conocimiento matemático y tienen control sobre éste, no como ocurre en la enseñanza y el aprendizaje tradicionalista, donde el conocimiento matemático controla a los (las) estudiantes, generando en ellos (as) temor, incertidumbre y, en la mayoría de los casos, desmotivación por aprender matemáticas.

Conclusiones

Con esta propuesta de enseñanza no se pretende presentar una receta que pueda ser aplicada por otros profesores en el aula de clase, sino más bien mostrar una manera distinta de abordar la enseñanza de las Matemáticas con base en el modelo curricular por *procesos* propuesto por Stenhouse (1991). No se trata entonces de replicar en el aula de clase las propuestas hechas por otros profesores, sino más bien prestar atención a los rasgos y principios fundamentales de estas propuestas, con el fin de tomar decisiones autónomas en el aula de clase, teniendo en cuenta los procesos y las necesidades de aprendizaje de los (las) estudiantes. Gracias a este trabajo de indagación en el aula se pudieron identificar problemáticas de la propia práctica de enseñanza y se logró aprender bastante acerca de los procesos de aprendizaje de los (las) estudiantes cuando estos(as) se encuentran resolviendo triángulos rectángulos, haciendo uso de las razones trigonométricas. Así, se puede observar el papel educativo que tiene la investigación en el aula, pues permite el perfeccionamiento de las prácticas de enseñanza del profesor y con esto la transformación real de la enseñanza de las matemáticas en las aulas de clase.

REFERENCIAS

Agudelo-Valderrama, C. (2002). Promoción del pensamiento algebraico en la escuela primaria: una propuesta que cobra sentido de acuerdo con nuestras concepciones obre el conocimiento matemático. *Aula Urbana*. No 37.

Arenas, F., Becerra, M., Morales, F., Urrutia, L. & Gómez, P. (2014). Razones trigonométricas. En P. Gómez. *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 359-435). Bogotá: Ediciones Uniandes.

Artigue, M. (2007). *Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental*"; CIAEM XII-Querétaro México.

Gómez, P. (Ed.).(1997). *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1*.. Bogotá: Universidad de los Andes. pp. 342-414.

Martínez, M. (2000). La investigación-acción en el aula. *Agenda académica*, 7(1), 27.

Ortiz, A. & Arias, R. (2012) GeoGebra como herramienta para la enseñanza de la Matemática: resultados de un curso de capacitación.

Sicre, O. & Munguía, J. (2007). Construcción de significados para las razones trigonométricas mediante un aparato virtual diseñado con cabri. *XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas– Universidad de Sonora. México*.

Stenhouse, L. (1991). *Investigación y desarrollo del currículum*. Madrid: Ediciones Morata.

Vasco, C. (1978). Estratificación conceptual del proceso de producción de conocimientos matemáticos. *Ideas y Valores*, 27(53-54), 99-112.

12. Grupos de simetría de los polígonos: el caso del triángulo equilátero y el pentágono regular

Diana Isabel Quintero Suica[1*]

Resumen

En el presente artículo se aborda la construcción de los grupos de simetría del triángulo equilátero y del pentágono regular, a partir de las simetrías axiales y rotaciones de estos. También se verifican las propiedades de grupo para la operación composición definida en el conjunto de simetrías y algunos otros elementos de estos grupos como, por ejemplo, los subgrupos normales.

Palabras claves: Grupo, operación composición, subgrupo, subgrupo normal.

Introducción

En el campo de la teoría de grupos se puede estudiar un ejemplo particular de construcción de estos por medio del conjunto de rotaciones y simetrías axiales de los diferentes polígonos regulares existentes, y la operación composición definida en dicho conjunto. En este caso, se tratarán los grupos construidos a partir del triángulo equilátero y el pentágono regular, los cuales muestran algunas bases para la generalización de cualquier polígono regular.

Para iniciar con el estudio de estos grupos, vale tener presente algunas definiciones como las de grupo, rotación y simetría axial. Pérez (2008) indica que *sobre un conjunto no vacío G una operación definida sobre G determina una estructura de grupo si: es asociativa, existe en G un elemento neutro y todo elemento de G admite un inverso para esta operación*, es decir que:

- $\forall\ a, b, c\ \in G: (a * b) * c = a * (b * c)$
- $\exists!\ e\ \in G$ tal que $\forall\ a\ \in G: a * e = e * a = a$
- $\forall\ a\ \in G, \exists!\ a^{-1}: a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

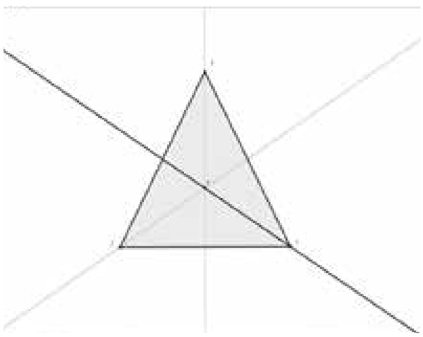
Se puede notar que la propiedad clausurativa no se encuentra explícita allí debido a que, al hablar de *operación*, se sobrentiende que ésta es cerrada en el conjunto en el que se encuentra definida.

Caro, Obonaga y Pérez (1987) definen una rotación como el movimiento de una figura respecto de un punto fijo, sobre un plano. Dicho punto fijo recibe el nombre de centro de rotación y esta se efectúa teniendo en cuenta un ángulo determinado.

Una simetría axial se define como aquella en la que un polígono al ser rotado 180 respecto de una recta, éste se superpone a sí mismo. A la recta respecto de la cual se efectúa la rotación se le denomina eje de simetría (Caro, Obonaga & Pérez, 1987).

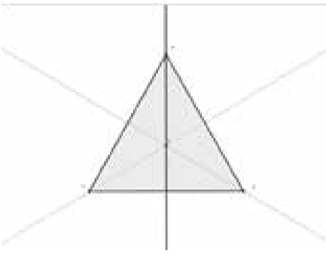
Triángulo equilátero

El triángulo equilátero posee unos vértices a los que se nombrarán con los tres primeros números naturales. Se denominarán *l, m* y *n* a las bisectrices de cada uno de los ángulos del triángulo y se denominará *P* al punto de intersección de las bisectrices, como se muestra a continuación.



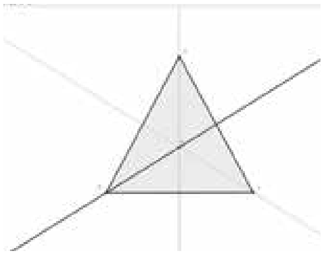
A partir de lo anterior se construye el conjunto de rotaciones del triángulo, teniendo en cuenta un ángulo de 120º cada vez. Las tres rotaciones se muestran a continuación:

1 Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.
e-mail: dma_dquintero472@pedagogica.edu.co



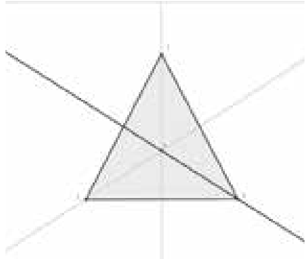
Rotación 120º

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



Rotación 240º

$$r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

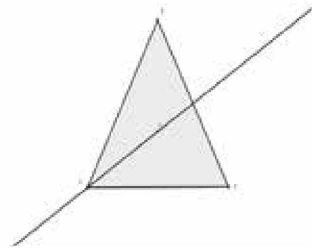


Rotación 360º

$$r_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

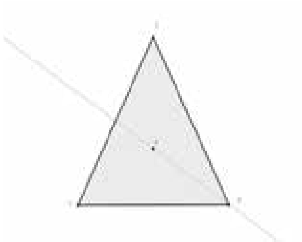
En la tercera fila de la tabla anterior se representaron las rotaciones con una notación particular. Para entenderla se tomará por ejemplo la rotación . Al efectuarla, todos los vértices del triángulo rotaron un ángulo de 120º. El vértice que se había bautizado con el número 1 (primer número de la primera fila) es ahora el vértice denotado con el número 2 (primer número de la segunda fila). El vértice denominado como número 2 (segundo número de la primera fila) ocupa ahora la posición del vértice número 3 (segundo número de la segunda fila). Por último, el vértice nombrado como número 3 (tercer número de la primera fila) es ahora el vértice denotado con el número 1 (tercer número de segunda fila).

Para construir las simetrías axiales, se va a rotar el triángulo respecto de cada una de las bisectrices, de forma que siempre quede superpuesto. A continuación se muestran dichas simetrías:



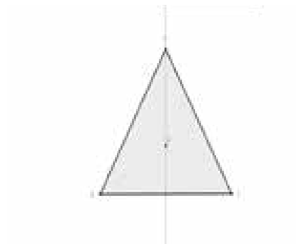
Respecto de la recta *l*

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Respecto de la recta *m*

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



Respecto de la recta *n*

$$s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A partir de lo anterior, el conjunto que determinará el grupo de simetrías del triángulo equilátero se conforma con y . Se requiere, entonces, definir la operación en este conjunto con la cual se tendrá un grupo. La operación será la composición de elementos de este conjunto y se denotará con el símbolo .

Para efectuar la composición de dos elementos de este conjunto se tendrá en cuenta, como analogía, la forma de composición de funciones. Es decir, por ejemplo, las rotaciones y . El resultado de la operación será entonces:

En la rotación el vértice denominado con el número 1 es ahora el vértice número 3, pero en la rotación el vértice denominado con el número 3 es el mismo. Algo similar sucede con cada uno de los vértices del triángulo, por lo cual la composición da como resultado la rotación.

Efectuando cada una de las operaciones con cada pareja de elementos del conjunto y se obtiene la siguiente tabla:

$\circ$	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
r_1	r_2	r_3	r_1	s_2	s_3	s_1
r_2	r_3	r_1	r_2	s_3	s_1	s_2
r_3	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
s_1	s_3	s_2	s_1	r_3	r_2	r_1
s_2	s_1	s_3	s_2	r_1	r_3	r_2
s_3	s_2	s_1	s_3	r_2	r_1	r_3

En la tabla anterior se pueden confirmar que las propiedades para un grupo algebraico se cumplen. Por ejemplo, el elemento idéntico es la rotación . Para la rotación y la simetría su inverso es sí misma. El inverso de la rotación es , y viceversa. Lo mismo sucede con las simetrías y : el inverso de una es la otra. Por último, es fácil verificar que para cada terna de elementos la operación es asociativa.

También se puede observar que, en general, la operación no es conmutativa. Por ejemplo,

$$r_2 \circ r_3 = r_3 \circ r_2$$

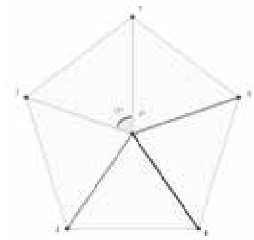
Pero

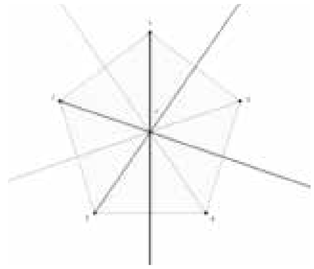
$$s_1 \circ s_2 \neq s_2 \circ s_1$$

Por lo cual se concluye que el grupo no es un grupo conmutativo o abeliano.

Pentágono regular

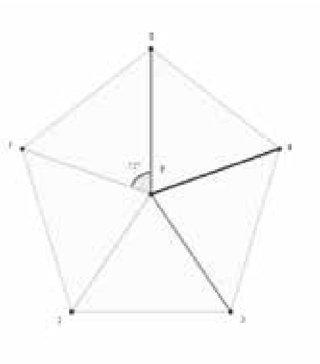
En el pentágono los vértices se nombran con los números naturales del 1 al 5. Para efectuar las rotaciones, esto se hará con un ángulo de 72º. Además, se trazaron las rectas *l, m, n, o* y *p* a cada uno de los puntos medios de los lados de éste, como se ilustra en las siguientes imágenes.



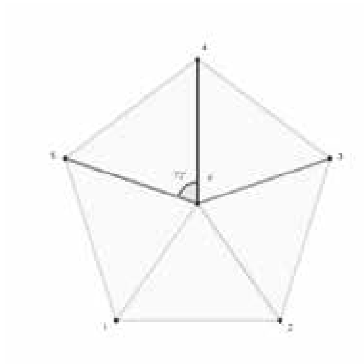


A continuación se muestran las rotaciones y simetrías axiales con las que se conforman el conjunto necesario para construir el grupo:

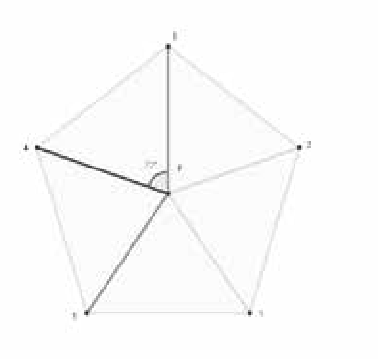
Rotaciones



Rotación 72º

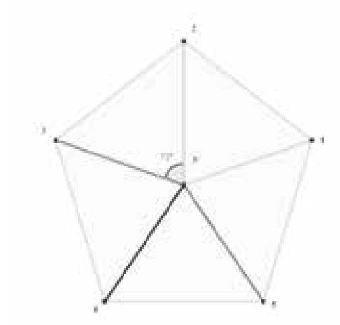


Rotación 144º



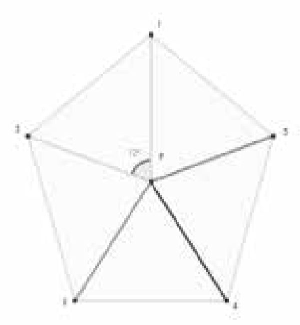
Rotación 216º

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad r_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



Rotación 288º

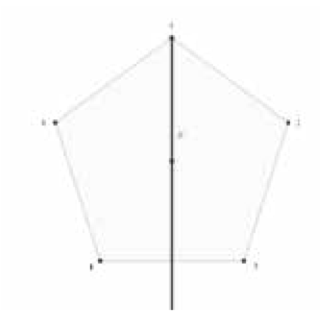
$$r_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



Rotación 360º

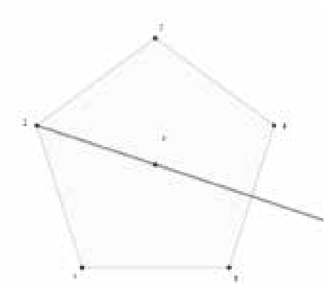
$$r_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Simetrías axiales



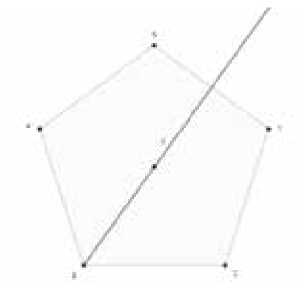
Respecto a la recta *l*

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



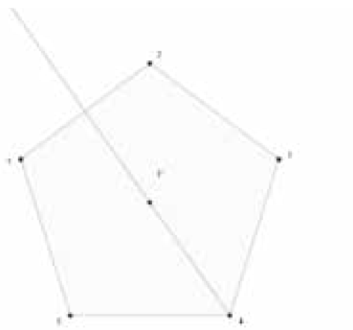
Respecto a la recta *m*

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



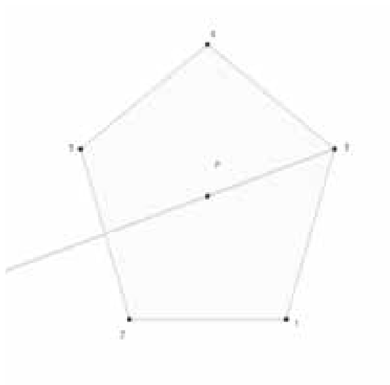
Respecto a la recta *n*

$$s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Respecto a la recta *o*

$$s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$



Respecto a la recta *p*

$$s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Teniendo los diez elementos del conjunto y , utiliza la misma operación del conjunto de simetrías del triángulo equilátero, obteniendo la siguiente tabla:

$\circ$	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_1
r_2	r_3	r_4	r_5	r_1	r_2	s_3	s_4	s_5	s_1	s_2
r_3	r_4	r_5	r_1	r_2	r_3	s_4	s_5	s_1	s_2	s_3
r_4	r_5	r_1	r_2	r_3	r_4	s_5	s_1	s_2	s_3	s_4
r_5	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1
s_2	s_1	s_5	s_4	s_3	s_2	r_1	r_5	r_4	r_3	r_2
s_3	s_2	s_1	s_5	s_4	s_3	r_2	r_1	r_5	r_4	r_3
s_4	s_3	s_2	s_1	s_5	s_4	r_3	r_2	r_1	r_5	r_4
s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	s_5	r_4	r_3	r_2	r_1	r_5

Esto es un grupo cuyo elemento idéntico es la rotación . También es fácil verificar los elementos inversos y verificar que la operación definida es asociativa. En general, tampoco se cumple la propiedad conmutativa, por lo cual no es un grupo conmutativo o abeliano.

Subgrupos y subgrupos normales

Un subgrupo de un grupo *G* es un subconjunto que se comporta como grupo algebraico para la misma operación de *G* (Pérez, 2008). Además, un subgrupo *H* de un grupo *G* es un subgrupo normal si para todo y para todo , los conjugados (Pérez, 2008).

Un ejemplo es el triángulo equilátero. En la tabla construida anteriormente se puede observar que las rotaciones forman un grupo con la misma operación en el conjunto de las simetrías del triángulo equilátero. El elemento idéntico de este subgrupo es . Los inversos de , y son , y , respectivamente. La operación es asociativa y además conmutativa, por lo cual este subgrupo es además abeliano.

$\circ$	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
r_1	r_2	r_3	r_1	s_2	s_3	s_1
r_2	r_3	r_1	r_2	s_3	s_1	s_2
r_3	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
s_1	s_3	s_2	s_1	r_3	r_2	r_1
s_2	s_1	s_3	s_2	r_1	r_3	r_2
s_3	s_2	s_1	s_3	r_2	r_1	r_3

Este subgrupo $H = \{r_1, r_2, r_3\}$ también es normal. Esto se verifica fácilmente efectuando las operaciones.

$$r_1 \circ s_1 \circ r_2 = r_1, \quad r_1 \in H \quad r_1 \circ s_2 \circ r_2 = r_1, \quad r_1 \in H \quad r_1 \circ s_3 \circ r_2 = r_1, \quad r_1 \in H$$
$$r_2 \circ s_1 \circ r_1 = r_2, \quad r_2 \in H \quad r_2 \circ s_2 \circ r_1 = r_2, \quad r_2 \in H \quad r_2 \circ s_3 \circ r_1 = r_2, \quad r_2 \in H$$
$$r_3 \circ s_1 \circ r_3 = r_3, \quad r_3 \in H \quad r_3 \circ s_2 \circ r_3 = r_3, \quad r_3 \in H \quad r_3 \circ s_3 \circ r_3 = r_3, \quad r_3 \in H$$

Un análisis similar se puede hacer con el grupo de simetrías del pentágono regular. En este caso el subgrupo normal estará conformado por los elementos $H = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$.

A partir de todo lo anterior se espera que el lector interesado pueda generalizar el procedimiento para polígonos regulares diferentes y verificar algunas otras propiedades. Además, puede estudiar el caso de polígonos como el triángulo isósceles y el rectángulo, definiendo, en caso de ser posible, una operación que, con el conjunto resultante de las rotaciones y simetrías (o algún otro movimiento en el plano) de estos polígonos, sea alguna estructura algebraica conocida.

REFERENCIAS

Caro, V., Obonaga. E. & Pérez, J. (1983). *Matemática 2: Aritmética y Geometría.* Bogotá: PIME Editores.

Pérez, E. (2008). *Estructuras algebraicas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

13. De la ecuación a la función: las primeras huellas del análisis

Jorge Enrique Mendoza Guzmán[1]

Resumen

En este artículo se muestra un análisis histórico relacionado con el paso de la ecuación a la función y su constitución como objeto matemático. Justamente, este tránsito es permeado por líneas de causalidad que, en cierta manera, se presentan como objetos auxiliares en la creación de un concepto.

Palabras clave: Historia de las matemáticas, análisis, ecuaciones, funciones, series de potencias.

Introducción

En este capítulo se aborda el movimiento evolutivo producido por la incorporación de ecuaciones algebraicas y su relación con las curvas. El punto terminal de estos cambios desemboca en el desarrollo de la noción de función, concepto cuyos principales precursores son Newton, Leibniz, Euler, Bernoulli y Cauchy. Aunque la formalización de dicho concepto presente huellas en la obra de Cauchy, se comparte lo expresado por Youschkevitch (1975) en el sentido de que

> la idea de función entendida de una u otra manera está implícitamente contenida en las reglas para medir áreas de las figuras más simples, tales como rectángulos, círculos, etc., conocida al principio de la civilización y las primeras tablas (algunas tablas son funciones de dos variables) de adición, multiplicación, división etc. (p. 40).

Para precisar el desarrollo del concepto de función, es necesario entrar en detalle con sus elementos primigenios como el concepto de variación, dependencia entre variables y cantidades, todo esto posteriormente desemboca en la creación del análisis matemático, donde el concepto principal es la noción de función.

1 Licenciado en Matemáticas, Universidad del Valle. Estudiante de la Maestría en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Valle. Docente Pontificia Universidad Javeriana Cali

La primitiva idea de *Cantidad variable*

Indudablemente, la manera de reconocer las curvas geométricas a través de ecuaciones algebraicas lleva implícitamente cierto sentido de dependencia entre valores conocidos y desconocidos (segmentos, para Descartes) como los puntos de la forma , los cuales son la base del sistema referencial bien sea oblicuo o perpendicular. A raíz de esto comienza a engendrarse la idea de la variación de magnitudes, es decir, dado un valor de obtener su respectivo ; esta idea es tratada por (Descartes R. , 1637) Los elementos primigenios de esta idea surgen cuando Newton establece la idea de variación entre cantidades expresadas mediante las fluentes, es decir, cantidades que varían de posición con respecto al tiempo.

Una conexión encontrada con la idea de variación respecto del movimiento se presenta en la forma de definir las curvas mecánicas; ha que recordar que éstas son generadas por dos movimientos independientes que produce la curva punto a punto. Precisamente, la variación de sus parámetros es la que permite relacionar e inferir dicha relación. Pero quien intenta establecer una definición para cantidad variables es Euler, quien define que una cantidad variable "es una cantidad indeterminada o universal la cual comprende por sí misma todos sus valores (Youschkevitch, 1975, p. 61).

El concepto de *función* en Newton y Leibniz

Entre los siglos XVII y XVIII, Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Von Leibniz (1646-1716) sistematizaron y enriquecieron un conjunto de técnicas provenientes de sus antecesores como la geometría analítica de Descartes, las tangentes de Fermat-Descartes, entre otros. En este sentido, desarrollaron unos potentes algoritmos que permitieron la solución de problemas como los centros de gravedad, áreas, volúmenes, tangentes, radios de curvatura, longitudes de arco, etc. De esta manera el legado teórico de Descartes permitió extender los conceptos y aportes matemáticos que desencadenaron la creación de una ciencia llamada el cálculo infinitesimal.

En el siglo XVIII el cálculo presentó conexiones con los fenómenos físicos, permitiendo el desarrollo de la mecánica, la óptica y astronomía. Posteriormente, todos estos desarrollos fueron aumentando y abriendo nuevos caminos del conocimiento matemático. Una de las ideas claves de todo este cúmulo de conocimiento se refiere a la idea de *función*. Precisamente, a quien se le acuña por primera vez el uso de dicho término es a Leibniz, quien expresa que la relación entre la ordenada y abscisa es representada por alguna ecuación conocida, otra clase de líneas las cuales, en una figura dada, forman una función (Youschkevitch, 1975, p. 56). Este reconocimiento permite inferir que Leibniz admite el sistema coordenado y que, a partir de este, existe una ecuación que satisface una relación entre sus componentes.

En cambio, Newton no realiza mención de esto, pero tiene implícitamente la dependencia entre variables y cantidades constantes; el sistema coordenado referencial no se distancia mucho del propuesto por Descartes, ni la notación usada. A los segmentos los llama usando las letras *x, y, z,* etc. mientras que las constantes *a, b, c,* etc. (Newton, 1711).

El concepto de función y el delineamiento del análisis matemático en los siglos XVIII y XIX

El desarrollo y la introducción de las curvas que involucran senos, cosenos y, en general, las correspondientes a las curvas mecánicas, abrió la posibilidad relacionada con la representación. Esto representó un problema puesto que el representar una cantidad expresada mediante una serie infinita permitía conocer una expresión analítica. A partir de esto surge cierto interés por encontrar expresiones más generales que permitan relacionar cantidades[2]. Precisamente, Johann Bernoulli (1694- 1718) encuentra una de estas representaciones la cual denota una fórmula general que relaciona todas las cuadraturas.[3]

$$int.\,n\,dz = nz - \frac{1}{2}zz\frac{dn}{dz} + \frac{1}{1.2.3}\frac{z^3 ddn}{dz^2} - \frac{1}{1.2.3.4}\frac{z^4 dddn}{dz^3} + \cdots$$

Aparentemente esta serie admite la expansión de una cantidad como una expresión analítica arbitraria; sin embargo, la fórmula presenta problemas en el caso de considerarse ecuaciones de la forma $\frac{a}{x^n}, a \neq 0$ (Mendoza-Guzmán, 2013, p. 4) Una de las primeras definiciones dadas acerca de que es una función, fue establecida por Johann Bernoulli en 1718, quien define una función en lo siguientes términos:

Definición 1. Se llama función de una o varias variables a una cantidad compuesta de cualquier manera. Se llama función de una variable a una cantidad compuesta, de manera que sea, por esa variable y por constantes (citado por Youschkevitch, 1975, p. 60).

Esta definición admite la manera de crear funciones bajo condiciones de composición entre cantidades variables y constantes; sin embargo, cabe preguntarse si las series de potencias constituían en sí una función. Precisamente, quien considera que las series de potencias son funciones es Leonhard Euler (1707-1783); él brinda una segunda definición de lo que es función, aunque, si se le analiza respecto de la dada por Bernoulli, discrepa un poco debido a que admite el término *función analítica*. En términos generales, pareciera ser que las funciones podían ser obtenidas mediante la aplicación de las propiedades aritméticas conocidas (suma, multiplicación, división y radicación) sin importar si la cantidad de términos era finita o infinita.

Definición 2. Una función de cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera por esta cantidad variable y por números o cantidades constantes (citado por Youschkevitch, 1975, p. 61).

El desarrollo del concepto de función ha estado amarrado a la forma de quienes han intentado y establecido una definición (explícita, implícita o intuitivamente) de acuerdo con sus líneas de desarrollo, su aplicabilidad en la resolución de problemas y formalización del análisis matemático. A continuación se han recogido las diferentes definiciones que se han dado de función a lo largo de

2 En el sentido de Newton, se habla de encontrar fórmulas generales, como el binomio, que permiten acoger un gran número de curvas.

3 Otro de los resultados que giran alrededor de este trabajo y que apoyan nuestra tesis principal es la publicación de otro artículo “A generalization of integrals by the formula of integration by parts” (ANEXO I) en el cual se encuentra una manera alternativa para deducir la fórmula de Bernoulli. Se ha encontrado que ésta fórmula, para algunas funciones presenta problema respecto a la convergencia. La serie hallada puede reescribirse como $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n f^n(x)x^{n+1}}{(n+1)!} + C$ (Mendoza- Guzmán II, 2013, p. 4).

un periodo de 200 años. Entre éstas se destacan las definiciones dadas por Nicolás de Condorcet (1743-1794), Joseph Lagrange (1736-1813), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768- 1830), Gustave Dirichlet (1805-1859), Augustin Louis Cauchy (1789- 1857) y Nicoles Bourbaki (1939- 1967).

Por ejemplo, Nicolás de Condorcet (1743-1794) intenta dar una definición de función en la que ofrece una caracterización de la dependencia entre y ciertas cantidades.

Definición 3. Asumo que tengo un cierto número de cantidades $x, y, z \ldots$ y para cada valor definido de $x, y, z,, F$ tiene uno o más valores definidos correspondientes a ellos; yo digo que es una función de x, y, z (Condorcet, citado por Youschkevitch, 1975, p. 75).

Joseph Lagrange expone que

Definición 4. A cualquier expresión del cálculo en la cual esas cantidades entran de manera cualquiera, mezcladas o no con otras cantidades que miramos como teniendo valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones consideramos solo las cantidades que suponemos variables sin ninguna mirada a las constantes Lagrange, citado por (Youschkevitch, The Concept of function up to the Middle of the 19th Century, 1975)

En palabras de Jean Baptiste Joseph Fourier,

Definición 5. En general, la función $f(x)$representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Dados una infinidad de valores de la abscisa , hay un número igual de ordenadas f $f(x)$. Todas tienen valores numéricos, ya sean positivos, negativos o cero. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen unas a otras de una forma cualquiera y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad sola (citado por Ruthing, 1984, p. 73).

Ahora bien, para Peter Lejeune Dirichlet

Definición 6. y es una función de una variable en un intervalo $a < x < b$, si para cada valor de la variable x en este intervalo corresponde un valor definido de la variable y, sin importar de qué forma esta correspondencia es establecida. (Dirichlet, citado por Youschkevitch, 1975, p. 78).

Augustin Louis Cauchy plantea que

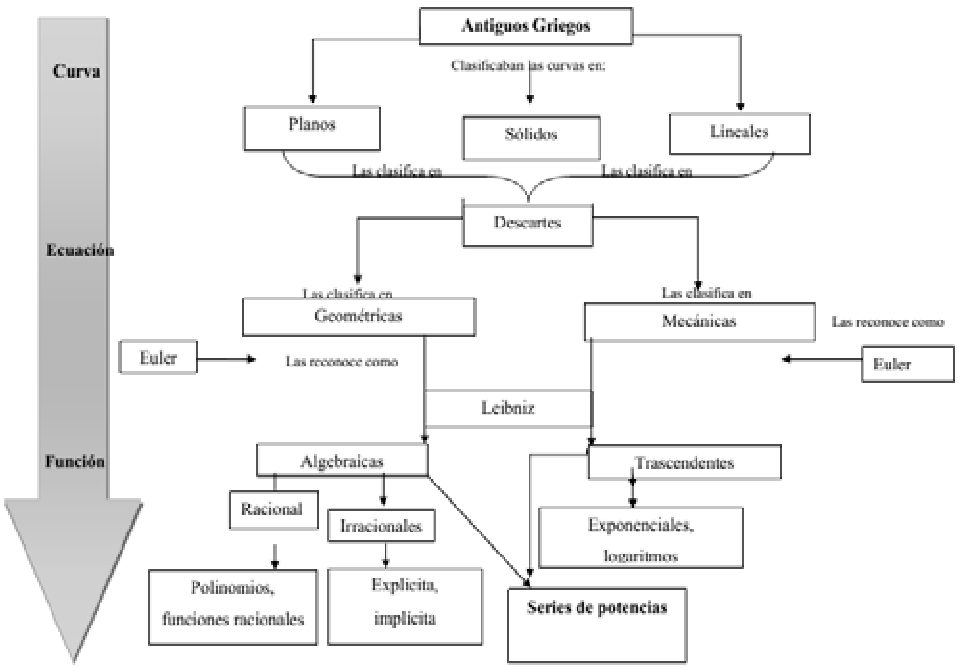
Definición 7. Cuando cantidades variables están relacionadas entre sí de tal manera que los valores de algunos de los unos se dan, puede encontrar todos los demás, consideramos estas distintas cantidades que se expresa por medio de varios de ellos que, por lo tanto, toman el nombre variables independientes. Las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente se denominan funciones de esas mismas variables (Cauchy, 1821, p. 17).

Todas estas definiciones muestran que el concepto de función ha ido evolucionando, pasando por consideraciones como expresión analítica con dependencia e independencia de sus términos (constantes y variables). Pero a raíz de la admisión de ciertas funciones como las trascendentes y de funciones definidas a trozos, se comienzan a clasificar las funciones.

Descartes (1637) es el primero en dar una clasificación para las curvas conocidas: geométricas y trascendentes (p. 44). Pero el clasificar las curvas no implicaría necesariamente clasificar funciones; sin embargo, es Euler quien brinda una clasificación un poco más formal para las curvas, todo esto precedido por la clasificación de Leibniz. Si se analizan las líneas de desarrollo para el objeto curva proveniente desde la concepción de los antiguos hasta Descartes, estas corresponden al primer movimiento curva-ecuación, sumado al segundo movimiento correspondiente desde Descartes a ecuación y función. El siguiente cuadro muestra las líneas de desarrollo desde los antiguos, pasando por Descartes hasta Euler y la instauración de la función que ha sufrido el objeto curva. Como base se toma el itinerario curva-ecuación- función.

El siguiente cuadro muestra la forma como las curvas comienzan a caer y a tener acogida bajo ciertas líneas que permitieron un desarrollo más formal.

Como primera parte, la concepción de los griegos hacia las curvas permitió distinguir la primera clasificación de la curvas (problemas planos, sólidos y lineales). Posteriormente, Descartes acoge esta concepción y clasifica las curvas geométricas y mecánicas, mientras que en la línea de desarrollo de las curvas geométricas se conciben las curvas algebraicas, racionales, irracionales, polinomios infinitos (series de potencias) caracterizadas por Euler y, por otra parte, la línea de desarrollo de las curvas mecánicas (trascendentes) nombradas por Leibniz e identificadas por Euler que sucumben los logaritmos, exponenciales, así como las series infinitas y de potencias. Notemos como este desarrollo se encuentra enmarcado en el itinerario curva, ecuación y función, las series de potencias aparecen como una herramienta alternativa que acogen gran cantidad de curvas que los matemáticos usan actualmente.



Fuente: Elaboración propia

La convergencia de las series en Cauchy

En su curso de análisis de 1821, Augustin-Louis Cauchy (1821) sistematiza el conocimiento matemático que desemboca en la creación del análisis. En su libro, dedica un capítulo especialmente al formalismo de las series infinitas y a definir mediante supuestos algebraicos, un tanto alejados de lo geométrico, cuándo una serie converge o diverge.

Primero que todo, Cauchy considera una serie como una secuencia indefinida de cantidades que siguen una determinada ley de formación. Bajo esta concepción define la suma de la serie S_n, la cual se constituye como la suma de los primeros n elementos de las cantidades dadas, de la forma $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$. Si esta suma tiende a un cierto límite S, entonces converge; de lo contrario, diverge. Todo esto permite evidenciar que el tratamiento inicial para las series en Cauchy está determinado a separar las series en dos grupos: convergentes y divergentes. Con Cauchy se desliga la idea de obtener nuevas representaciones de ecuaciones amarradas a las cuadraturas; por ello, una de las ideas claves se da cuando se establece que, si se tiene la serie de cantidades de la forma $1, x, x^2, x^3, \ldots$, su respectiva suma corresponderá a $\frac{1}{1-x}$.

La representación de un objeto estaría amarrada a establecer y asociarle una cantidad para ciertos valores de x. Uno de los hechos de gran importancia respecto del tratamiento de las series es el reconocimiento entre los distintos valores que puede adquirir una serie. Para ello Cauchy realiza un análisis particular para los valores que puede tomar la siguiente serie y se pregunta por su respectiva suma: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 0$ (Modernamente sabemos que). El análisis, en este caso, corresponde a suponer cuando *x>1,x=1,x<1,* en los dos primeros casos la serie diverge, mientras que en el tercer caso realiza la siguiente cadena de comparaciones.

Cauchy aprovecha el hecho de tomar valores menores que uno, puesto que estos permiten obtener que, a medida que *n* sea muy grande, la suma sea infinitamente pequeña. Con esto se comienza a evidenciar la idea de límite.

$$x^n < x^n + x^{n+1} = x^n \frac{1-x^2}{1-x} < x^n + x^{n+1} + x^{n+2} = x^n \frac{1-x^3}{1-x} < \cdots$$

Cauchy caracteriza las series de términos positivos y establece algunos teoremas de convergencia. Históricamente, la propuesta de Cauchy constituye un punto de quiebre en la constitución del análisis como rama de las matemáticas, al cimentarla sobre unas bases sólidas a partir del concepto de función y límite.

Al introducir una definición de límite que prefigura su tratamiento en términos de inecuaciones, se puede afirmar que los trabajos de Cauchy abren perspectivas del desarrollo de las funciones en series de potencias. A partir de Cauchy empieza a discutirse el problema de la convergencia puntal y la convergencia uniforme.

Como antesala a esta discusión, Cauchy establece y demuestra los criterios de convergencia para series de términos positivos. A continuación se muestra algunos conocidos:

- El criterio de la raíz (Cauchy, 1821, p. 91), en el que se establece que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es convergente si $\limsup \sqrt[n]{|u_n|} < 1$ y es divergente si $\limsup \sqrt[n]{|u_n|} > 1$

- El Criterio de la razón (Cauchy, 1821, p. 92) establece que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es convergente para valores crecientes de *n* en la proporción $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ cuando el $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, cuando *k<1*; en caso contrario, diverge.

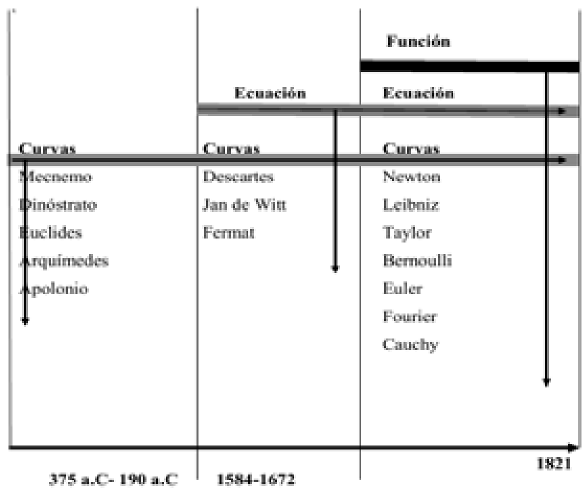
- El Criterio de comparación (Cauchy, 1821, p. 93) establece que si $u_{n+1}>u_n>0$ entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n u_{2^{2n}}$ converge; en caso contrario, no.

- El Criterio del logaritmo (Cauchy, 1821, p. 94) establece que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es convergente para $\frac{\ln u_n}{\ln(\frac{1}{n})}$ cuando el límite es un valor finito *h*, para valores crecientes de *n*. Converge cuando *h<1* ; diverge cuando *h>1*

Finalmente, el Criterio de la serie alterante (Cauchy, 1821, p. 98) establece que si el valor numérico del término general u_n decrece constantemente e indefinidamente para valores crecientes de *n* y si además los diferentes términos son alternados positivos y negativos, entonces la serie converge.

Conclusiones

Una de las características más importantes encontradas en el trabajo es la aparición reincidente de las curvas (tanto geométricas como mecánicas), provenientes de la antigüedad hasta nuestros días. Precisamente, el siguiente diagrama permite ver un poco esto y evidencia la forma como la noción de curva se encuentra presente a lo largo del desarrollo del análisis:



Fuente: Elaboración propia

En el cuadro anterior se han delimitado tres espacios temporales relacionados con la aparición de este estudio: la curva, la ecuación y la función. La primera etapa corresponde al periodo entre 375 a.C y 190 a.C, donde justamente se permea el objeto curva y la manera como los antiguos la utilizaban para resolver problemas. El segundo periodo corresponde que abarca entre 1584 y 1672, donde se tienen indicios de la aparición de la representación de curvas mediante ecuaciones algebraicas.

El tercer periodo abarca hasta el año 1821 con el primer curso de análisis propuesto por Cauchy. Posteriormente se identifican las respectivas líneas de desarrollo de cada concepto amarradas a los diferentes aportes de sus autores. Esto se constituye en algo de gran importancia en la instauración del concepto de función.

De esta manera, en la línea de desarrollo del análisis se distingue la curva como un objeto presente en toda su línea de desarrollo, después aparece la ecuación algebraica que subsidia las curvas y al final *la función*, la cual estaría en la intersección de la curva y la ecuación. En todo este desarrollo presentado a lo largo del trabajo siguiendo el circuito curva-ecuación-función se evidencia que el objeto serie se vuelve transversal cuando las técnicas y métodos desarrollados no son suficientes en el sentido de producir y resolver problemas.

Todo esto gradualmente va permeando el desarrollo de la matemática de cierta manera transversal, es decir, existen unos saltos temporales y cognitivos que no permitieron que dicho desarrollo fuese continuo; conviene reconocer que las dificultades encontradas en la línea de evolución del concepto son determinantes en la transversalidad. Por ejemplo, al objeto curva le correspondió un gran salto temporal respecto de su representación, el paso de lo sintético a lo analítico y la manera de amarrar ecuaciones a las curvas.

La linealidad de su desarrollo se ve frenada en función de la solución de los tres problemas clásicos de la antigüedad griega. Sin embargo, es Descartes quien soluciona este impase. Por otra parte, el problema de realizar cuadraturas de figuras curvilíneas comienza a gestarse en Wallis y su manera de operar razones de series numéricas. Pero este a su vez tiene una idea intuitiva de convergencia, la cual representa cierto problema de rigor. Posteriormente, Newton y Leibniz inauguran la introducción de las series de potencias para resolver cuadraturas, pareciera ser que las series representan una herramienta que permite dar solución a problemas que los métodos tradicionales no podían sustentar.

REFERENCIAS

Cauchy, A. (1821). *Cauchy´s Course d´analyse.* (J. Buchwald, Ed., R. E. Bradley, & C. E. Sandifer, Trans.) New York: Springer.

Descartes, R. (1637). *La geometría.* (J. M. Ron, Ed., & G. Quintás, Trans.) España: Opera Mundi.

Ferraro, G. (2008). *The rise and development of the Theory of Series up to the Early 1820s.* New York: Springer.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A Brief Survey. College Mathematical Journal.

Mendoza- Guzmán II, J. E. (2013, Mayo). A generalization of integrals by the formula of integration by parts. *Revista Digital 360°, 8*.

Newton II, I. (2001). *Tratado de método de series y fluxiones.* (M. Panza, Ed.) México: Mathema.

Newton III, I. (1711). *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias con una enumeración de las líneas de tercer orden.* (A. J. Duran Guardeño, F. J. Pérez Fernandez, Eds., & J. L. Arantegui Tamayo, Trans.) Real Sociedad Matemática Española SAEM " Thales".

Ruthing, D. (1984). Some Definitions of the Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki. *Math Intelligencer, 6*, 72-77.

Youschkevitch, A. (1975). The concept of function up to the Middle of the 19th Century. Moscow : Institute for History of Science and Technology editorial.

14. Propuesta didáctica integral para el aprendizaje del análisis de gráficas a través del registro de percepción emocional en estudiantes de Básica Secundaria

Carlos Mario Torres Ramírez[1]
Diego Ricardo Rojas Cuellar[2]
Ovímer Gutiérrez Jiménez[3]

Resumen

La ausencia de motivación por parte de los estudiantes para el aprendizaje de las matemáticas y las dificultades del sistema educativo para generar actividades que permitan el desarrollo integral socio-afectivo del estudiante en el contexto colombiano, han generado en los investigadores interés sobre la posibilidad de desarrollar propuestas integrales de unidades didácticas secuenciales. Los estudiantes de básica secundaria presentan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, lo cual se refleja en las bajas calificaciones reportadas en los últimos periodos académicos y en las distintas pruebas nacionales e internacionales. Así mismo, se han reportado dificultades de convivencia escolar en la institución educativa Luis Carlos Galán.

En indagaciones previas realizadas en esta institución educativa, a través de la entrevista focal e individual semiestructurada y su posterior análisis de contenido, se encontró que las guías de enseñanza y aprendizaje en matemáticas no contienen aprendizajes de orden significativo e integral, basándose en la búsqueda del desarrollo socio-afectivo del estudiante. Ni siquiera el proyecto educativo institucional cuenta con una clara propuesta de inclusión del desarrollo psicológico en las áreas de trabajo regular.

Introducción

La enseñanza de las matemáticas ha sido un tema de muchos estudios y debates en el ámbito normativo y educativo, como lo plantea de manera clara el Ministerio de Educación Nacional (MEN):

> Finalmente, desde hace unos veinte años se han venido creando y desarrollando sociedades de matemáticas, una Sociedad Colombiana de Matemáticas y diversas sociedades departamentales que entre sus propósitos incluyen el de ofrecer espacios de estudio y debate de diversos aspectos curriculares como contenidos, metodologías, evaluación y formación de educadores (2001, p. 8).

Esto es un eje fundamental en el proceso del desarrollo humano y social; a su vez, los múltiples análisis elaborados desde diversas disciplinas ya sean educativas, pedagógicas y/o didácticas esclarecen la necesidad de preguntar ¿qué tipo de relación existe entre las matemáticas y el contexto?

> A la hora de abordar el currículo de matemáticas en los Proyectos Educativos Institucionales, se hace necesario reflexionar sobre preguntas como las siguientes: ¿Qué son las matemáticas? ¿En qué consiste la actividad matemática en la escuela? ¿Para qué y cómo se enseñan las matemáticas? ¿Qué relación se establece entre las matemáticas y la cultura? (MEN, 1998, p. 15).

---

1 Psicologo de la Universidad de Ibague. Magíster en Territorio y Conflito y Especialista en Pedagogía de la Universidad del Tolima. Director del programa Licenciatura en Ciencias Sociales de la Universidad del Tolima. e-mail: cmtorresr@ut.edu.co

2 Licenciado en Matemáticas de la Universidad del Tolima. Magíster en Educacíín y Especialista en Pedagogía de la Universidad del Tolima y Especialista en Gerencia de Instituciones Educativas (IDEAD - Universidad del Tolima). e-mail: drrojasc@ut.edu.co

3 Licenciado en Matemáticas de la Universidad del Tolima. Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia. Especialista en Pedagogía de la Universidad del Tolima y Especialista en Gerencia de Instituciones Educativas (IDEAD - Universidad del Tolima). Director del programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima. e-mail: ogutierrezji@ut.edu.co

Hay una necesidad urgente de contextualizar los contenidos temáticos del currículo, en especial en el área de matemáticas de la educación básica y media, y presentarlos de una manera diferente a como se ha venido desarrollando en el aula de clase. Una manera de hacer esto es apoyándose de unidades didácticas elaboradas por el mismo profesor de matemáticas en las que sitúe situaciones problemáticas contextualizadas que involucren los conceptos matemáticos; en el caso que nos ocupa, se trata de problemáticas que involucren el análisis e interpretación de gráficas cartesianas.

Algunos elementos de la realidad y la problemática

Desde hace más de una década la comunidad colombiana de educadores matemáticos viene investigando, reflexionando y debatiendo sobre la formación matemática de los niños, niñas y jóvenes, y sobre la manera como ésta puede contribuir más eficazmente a las grandes metas y propósitos de la educación actual.

La falta de motivación de muchos estudiantes colombianos por el aprendizaje de las matemáticas escolares, en especial por el aprendizaje del análisis y la interpretación de gráficas y el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes de la educación básica y media, y su bajo desempeño en las pruebas nacionales e internacionales —así como la persistencia en aulas escolares, de prácticas de enseñanza basadas en la transmisión y la repetición mecánica de algoritmos dados— señalan la necesidad urgente de enfocar y profundizar en el currículo de esta área, tanto en la educación básica como en la media.

En esa misma línea, De Guzmán (1984) propone que la construcción de gráficas cartesianas y su interpretación matemática sean consideradas como temas pertenecientes al equipamiento mínimo que debe poseer un ciudadano promedio. Así mismo, Campanario y Otero (2001) proponen que uno de los objetivos básicos de la enseñanza de las ciencias sea que los estudiantes aprendan a analizar e interpretar adecuadamente representaciones gráficas.

Sin embargo, con el fin de dar respuesta a esta problemática, Cox (1999) afirma que los (las) estudiantes deberían aprender a construir, usar, interpretar y seleccionar diferentes tipos de representaciones gráficas. Así mismo, Bowen, Roth y MacGinn (1999) sugieren que los (las) estudiantes deben participar permanentemente en actividades prácticas para desarrollar las habilidades requeridas para esta tarea.

Finalmente, es importante anotar que la ausencia de experiencia por parte de los (las) estudiantes en el trabajo interpretativo de las representaciones gráficas contrasta con el uso generalizado que se les da a las mismas en el aula de clase; además, por las razones anteriormente expuestas, se justifica la propuesta didáctica integral para el aprendizaje del análisis de gráficas a través del registro de percepción emocional en estudiantes de la Institución Educativa Luis Carlos Galán del grado once.

Por lo anterior, se debe tener en cuenta que el trabajo de investigación suple la necesidad de integrar las disciplinas en función del mejoramiento de las dinámicas de enseñanza y aprendizaje. Así mismo, disminuir las dificultades encontradas en la carente motivación de los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas y permitir desarrollar en el estudiante un autoconocimiento basado en el desarrollo de habilidades emocionales, algo que también aporta al mejoramiento de la convivencia y el desarrollo de la comunidad educativa en función del valor de la paz.

Las motivaciones intrínsecas y extrínsecas en consonancia con las actividades del conocimiento matemático pueden permitir un desarrollo de las competencias del ser-saber-hacer. Así mismo, esta propuesta permitirá tener alcances no solamente en lo que refiere al conocimiento matemático, sino también del autoconocimiento que les permite a los (las) estudiantes desarrollar sus habilidades emocionales.

¿Cómo se desarrolla una indagación inicial de los estados actuales en cuanto al conocimiento, las concepciones y prácticas pedagógicas que desde la enseñanza del análisis de gráfica emergen en la escuela? Posteriormente, se permite diseñar una propuesta didáctica integral que, desde el modelo pedagógico dialogante (Zubiría, 2006), se incorpora a través del desarrollo de competencias. Estas le permitirán al estudiante comprender cómo el registro de sus emociones en diversos espacios de interacción propia y social pueden ser ampliamente observados, apreciados, sintetizados, deducidos, entendidos y hasta modificados a través del análisis de gráficas.

Se ha conocido la problemática o el conflicto que los (las) estudiantes de las instituciones educativas han tenido en el área de matemáticas, bien sea por experiencia propia en la etapa escolar, o bien por la visión que puede ofrecer un alumno de educación primaria y media que se encuentre cerca del ámbito familiar. Además de lo anterior, las publicaciones que realiza el ICFES sirven a modo de informe para determinar cómo se encuentra la educación del país, qué desempeños hay para cada área evaluada, qué falencias posee el sistema. A modo de sondeo rápido puede verse que todas las áreas afines con la matemática tienen resultados desfavorables, pues resultan complejas para el estudiante.

Metodología

El apoyo de la Hermenéutica en este trabajo es sustancial, pues plantea la búsqueda de la interpretación de los textos que dicen, escriben y sienten los (las) protagonistas. Así mismo, permite sustentar el análisis de contenido como método (Noguero, 2009). En esta perspectiva, Sandoval refiere a la Hermenéutica como

> esta alternativa de investigación cualitativa, [que] aparece como una opción que no se agota exclusivamente en su dimensión filosófica sino que trasciende a una propuesta metodológica en la cual la comprensión de la realidad social se asume bajo la metáfora de un texto, el cual es susceptible de ser interpretado mediante el empleo de caminos metodológicos con particularidades muy propias que la hacen distinta a otras alternativas de investigación (Sandoval, 2002, pág. 67).

La búsqueda de la interpretación de los textos que desde la Hermenéutica se puede encontrar, estuvo basada en la consecución de los sujetos que pudieran proporcionar información importante respecto del tema de investigación; así mismo, que las condiciones en que se den sean las mejores para recolectar la información suficiente.

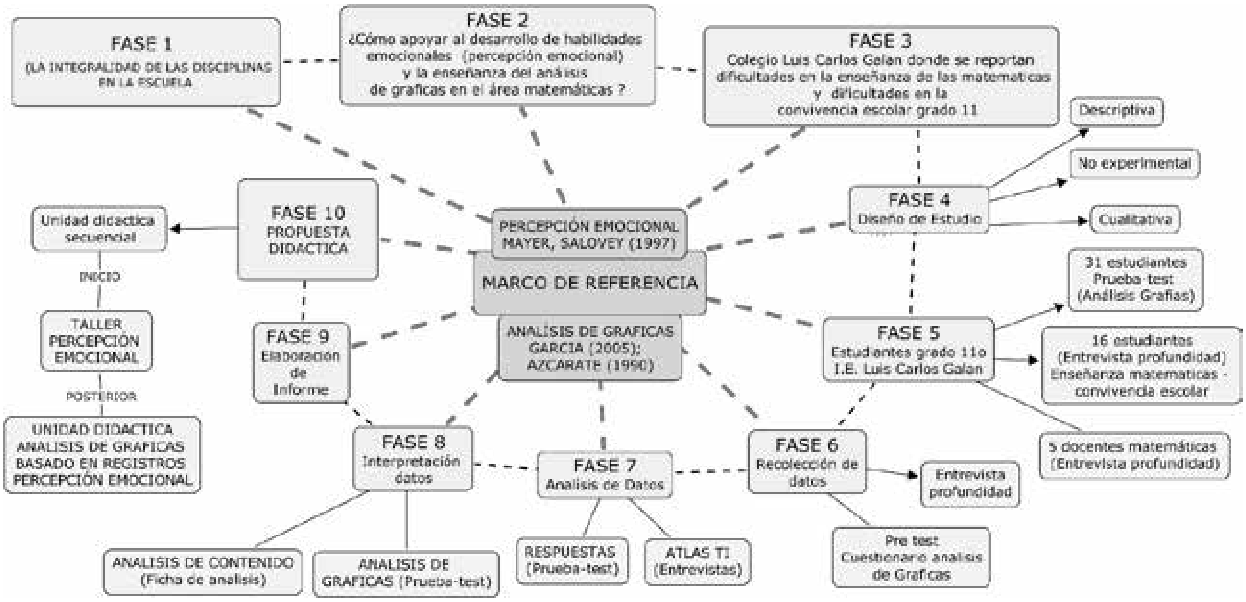
> Para que las interpretaciones en cuestión adquieran aceptabilidad deben cumplir por lo menos las siguientes condiciones: a) que explique toda la información relevante disponible; en tal sentido, dice Trankell (1972), si alguna acción o significación importante es excluida o difusamente reconstruida, la interpretación debe ser desechada; b) que la interpretación planteada sea la más plausible para explicar los eventos o fenómenos interpretados (Sandoval, 2002, pág. 68).

Mediante lo recolectado a través del análisis de contenido, y lo que se logró interpretar de los textos proporcionados por los sujetos de estudio, se permitirá que el informe sea una intención netamente descriptiva.

Etapas

La investigación acoge el Análisis de Contenido como método (Noguero, 2009; Bardin, 1991) y se diseñará de la siguiente manera:

Figura 1. Fases de la investigación



Fuente: Autores, Atlas ti (2015)

En total, las fases encontradas para el desarrollo adecuado de la investigación constituyeron 10 pasos, los cuales se retroalimentan en todo momento desde los marcos teóricos preponderantes y concibiendo el análisis de contenido como método.

De igual manera, posterior al análisis y la elaboración del informe, se procederá a desarrollar un capítulo sobre la unidad didáctica integral.

Aplicación, análisis y resultados del test

Se aplicó un test donde nos permitió diagnosticar sobre los presaberes de los estudiantes del grado once en relación con la interpretación y el análisis de gráficas para, de esta manera, intervenir con una propuesta didáctica que permita abordar el análisis de graficas a través de registros de la percepción emocional de los estudiantes. Teniendo en cuenta los estándares básicos para la enseñanza de las matemáticas en los grados de educación secundaria, la interpretación y el análisis de gráficas son abordados desde el grado noveno hasta grado undécimo, pero por razones de delimitación se presentarán acá los resultados del grado once.

El 56% de los estudiantes no identifican los ejes de un plano cartesiano tanto horizontal como vertical, los denominan eje *X* y eje *Y*, como usualmente se lo han enseñado para representar gráficas de funciones. Esto quiere decir que los estudiantes de manera instrumental y mecánica establecen que los ejes formados por las dos rectas perpendiculares siempre se van a llamar eje *X* y eje *Y*, sin tener en cuenta la situación presentada. Por otra parte, no infieren información de la gráfica al igual que no identifican las unidades en la gráfica, elementos destacados por Azcárate Giménez , C., & Deulofeu Piquet, J. (1990).

Análisis de las entrevistas. Grupos focales de estudiantes

Análisis de la categoría *Dinámicas de aprendizaje*

Con esta categoría se hace referencia al modo como los estudiantes pretenden y les gustaría que las matemáticas fueran impartidas, a partir de ejemplos sobre la forma como esta cátedra se puede dictar, teniendo en cuenta como referentes a algunos maestros de la Institución Educativa Luis Carlos Galán que aquellos resaltan por recurrir a buenas estrategias para la aprehensión de los conocimientos, formas didácticas de aprendizaje que tornan fácil el conocimiento sin que ello implique tener como enfoque primordial la evaluación, las encuestas sobre gustos y hobbies deben ponerse un tanto en duda, puesto que sigue siendo información superflua, que no arroja unos datos de relevancia para el alumno ni a nivel personal ni en lo social.

Es muy posible que apenas esta información sea suministrada se quede en el papel y en meros ejercicios, sin que por ello se genere una educación trasversal que dé soluciones a problemáticas convivenciales en la institución o frente al reconocimiento y acción de las dificultades en el entorno en donde se desenvuelve el alumno. En contraposición, se puede denotar que proponen una enseñanza más lúdica, basada en juegos, en donde se explica detenidamente lejos de un enfoque teórico distante de la trascripción. Se busca el modo de cambiar de metodología en cada clase y, así mismo, los temas a impartir no son repetitivos o extensos y se prolongan durante varios días de la clase. Esto último vislumbra las falencias que los alumnos del plantel educativo perciben.

Análisis de la categoría *Educación tradicional*

Esta categoría se pudo obtener gracias a una notable contradicción de argumentos que los alumnos del plantel perciben, puesto que en una categoría de análisis anterior se planteaban dinámicas de aprendizaje distintas que, de un modo u otro, rompiesen con la cotidianidad de clase mediante métodos llamativos para que la enseñanza de los ejes temáticos fuese interactiva, activa. Pese a estos pensamientos, se pudo evidenciar que los alumnos tienen una confusión, puesto que al momento de preguntárseles cómo consideraban que se debería enseñar las matemáticas, sus respuestas arrojaron que una educación y metodología tradicional es la mejor forma de enseñanza. En esta el maestro es quien dirige, planea, propone e imparte el conocimiento, y por ende no existe una retroalimentación por parte de los estudiantes, no solo en procesos de aprendizaje sino en la proposición de métodos de enseñanza. Es por ello que se pueden observar respuestas como explicaciones extensas y repetitivas que terminan por hacer de la cátedra algo tediosa, implementación de guías, libros, internet, realización de ejercicios para seguidamente proseguir con un momento evaluativo, por lo que la metodología se queda en meras y sencillas bases que no tienen una importancia correspondiente. Además de lo anterior, no se saca un máximo provecho de las mismas herramientas, especialmente de internet, que es una amplia herramienta que puede facilitar el aprendizaje de los ejes temáticos a desarrollar.

Análisis de la categoría: *Variación e implicaciones pedagógicas*

Se logró vislumbrar que el gusto y la disposición para la adquisición de conocimientos en el área de matemáticas tiene mucho que ver con las prácticas pedagógicas implantadas por el docente, el desarrollo metodológico, el manejo del aula, entre otros factores que logran que el alumno no logre la vinculación con la materia. Se resalta lo fundamental que es un docente que logra darse a entender, que sea organizado en su trabajo, que muestre disposición para repetir la temática a quienes presentan dificultad para su comprensión. Básicamente se determina que la efectividad y el éxito en el área también se encuentran en manos del docente y que de él depende una calidad óptima para la trasmisión del mismo. Esto significa que no sólo se pueden evaluar las competencias del alumno y sus discernimientos en el área, sino que también debe evaluarse al docente en sus prácticas pedagógicas para que, de ese modo, se puedan observar sus falencias y trabajar para una evolución educativa de la que se beneficien tanto docentes como alumnos. Lo anterior se puede lograr sin desmeritar los procesos que ya se tiene planteados y los conocimientos que los mismos docentes poseen.

Análisis de la categoría: *Dificultades en el entendimiento del área*

Se puede observar que los estudiantes consideran que el aprendizaje de las matemáticas es algo que le pertenece a personas eruditas, quienes tienen ciertas habilidades y capacidades que el alumno determina no poseer. De esta forma, a quien conoce del tema lo perciben como un profesional y un versado ("un duro") en la materia, alguien a quien nunca podrán igualar, pese a que se tiene consciencia de que su aprendizaje se requiere y obtiene a través del estudio de la misma. Se puede deducir que los estudiantes no hacen el menor esfuerzo por aprenderla. Esto se puede determinar por el grado de dinamismo y metodología del docente para impartir su cátedra, pues el interés del alumno varía de acuerdo con el ritmo de la clase generado por el docente ("a veces esas clases son chéveres", "hay veces no"). En esto último también incide el modo en que él mismo logre hacer entender la temática a impartir, pues si el docente logra mayor claridad en la explicación de un tema, en el alumno logrará germinar interés al comprender el conocimiento impartido; entre más condensada y concisa se pueda dar la información, la probabilidad de un entendimiento eficaz será mayor (“muchas fórmulas y casi no las entendía bien”, “me confundía mucho”).

Análisis de la categoría: *Gusto y disposición para las matemáticas*

Una de las problemáticas que se evidencian es la indisposición que los estudiantes tienen para las clases de matemáticas, pues son evidentes actitudes que lindan con el aburrimiento, el disgusto, la poca iniciativa frente a la clase, lo cual genera que el alumno se cierre a la comprensión de los conocimientos impartidos, un bloqueo inmediato sin ni siquiera intentarlo. El gusto por la materia se va planteando a partir del pensamiento sobre aquello que el estudiante quiere estudiar en la universidad. En este sentido en los estudiantes hay inquietudes sobre aspectos como, por ejemplo, cuál va a ser la carrera en que se desempeñarán por el resto de sus vidas. Por otro lado, se encuentra esta insatisfacción frente a las matemáticas debido a la complejidad de las temáticas que se imparten, por la cantidad y el uso confuso de fórmulas, y no sólo por la utilización de las mismas sino también por los diferentes enfoques que se les otorga (álgebra, trigonometría, estadística, matemáticas fundamental), lo que se torna complejo para el alumno. De igual manera, otro factor por el cual nace el gusto o disgusto por el área gira en torno a la metodología impartida por el docente y la forma como él mismo desarrolla su clase. Lo anterior no solo afecta al estudiante sino que también repercute en el mismo docente, quien también pierde interés por la elaboración de las clases, las estrategias y por la forma como se desenvolverá él en clase en el aula. Esto permite explicar por qué existen malos docentes para muchos estudiantes.

Docentes- prácticas pedagógicas

Las prácticas pedagógicas de los profesores del área de matemáticas de la Institución Educativa Luis Carlos Galán se pueden reconocer como tradicionales, puesto que están centradas en procesos de aprendizaje basados en la memorización de definiciones por partes de los estudiantes, y en donde debe existir una ejercitación y repetición de la ejercitación que consoliden el aprendizaje, con un sentido instrumental y de reproducción. Esto conlleva a que el estudiante deba estar disciplinado y deba aprender individualmente el contenido que transmite el profesor en el aula de clase de matemáticas de una forma magistral. Esto posibilita que los estudiantes estén juiciosos resolviendo los ejercicios.

Docentes – Concepciones

Por otra parte, una de las categorías para la realización de este trabajo es la referida a las concepciones que tienen los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Especialmente, en cuanto al análisis de gráficas, se evidencia que esto se asume como una representación de fórmulas que, en algunos casos, carece de sentido. Lo anterior se da en razón a que son prácticas descontextualizadas a la realidad del estudiante, según lo precisa un profesor. Incluso se presentan “fórmulas” que son para graficar en el plano cartesiano para lograr ubicación de puntos pertenecientes a una curva en el plano cartesiano.

Las prácticas pedagógicas están ligadas a las concepciones que se tienen sobre la enseñanza y, en ese orden de ideas, el hecho de que las clases se realicen de forma magistral obedece a la arraigada idea de que el profesor es quien tiene el conocimiento para explicárselo a los estudiantes. Por otra parte, es una verdad sabida que los estudiantes presentan falta de interés por las matemáticas, que en las clases no quieren hacer nada, que les da pereza hacer una actividad y, en este marco, un factor que dificulta la enseñanza y el aprendizaje es la cantidad de estudiantes que se presentan en el aula.

Algunas de las actividades propuestas van encaminadas a que los estudiantes se familiaricen con las pruebas de Estado, para que les vaya mejor en ellas. Otro factor que incide es que no se cuenta con los suficientes recursos para desarrollar otras actividades innovadoras que permitan que los (las) estudiantes se sientan atraídos por el estudio de las matemáticas.

Docentes – Aspectos didácticos de las matemáticas

En lo referente a los aspectos didácticos de las matemáticas, los profesores precisaron que, para el análisis de gráficas cartesianas, hay que retomar y no dejar pasar por alto aspectos generales tales como la información sobre fenómenos casuales que involucren situaciones, el contexto de los estudiantes, la representación del cambio y de la relación entre magnitudes, al igual que el hecho de reconocer las características globales de las gráficas en cuanto a continuidad, crecimiento, valores extremos, periodicidad, tendencia y la expresión algebraica, aspectos asociados a una gráfica.

Por otra parte, en los contenidos relativos a procedimientos se debe tener presente la utilización del lenguaje gráfico, teniendo en cuenta las situaciones que representa, utilizando el vocabulario y los símbolos adecuados, al igual que las expresiones algebraicas para describir gráficas en casos simples que permitan la interpretación y elaboración de tablas numéricas, a partir de datos o de expresiones funcionales, teniendo en cuenta el fenómeno al que se refieren.

También, la construcción de gráficas a partir de tablas estadísticas y funcionales, de fórmulas y de descripciones verbales de un problema, eligiendo en cada caso el tipo de gráfico y medio de representación más adecuado, identificando la detención de errores en las gráficas que pueden afectar a su interpretación. Y, como estrategia general, consolidar la formulación de conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica, teniendo en cuenta el fenómeno que representa o su expresión algebraica.

Conclusiones

- Los conocimientos adquiridos por los estudiantes sobre el tema de análisis de gráficas no son suficientes y presentan dificultades en la interpretación debido a que los conceptos y elementos que se requieren no son claros.

- El análisis de gráficas es una asignatura que es percibida por los estudiantes como un tema descontextualizado y, por lo tanto, hace perder el interés en su aprendizaje.

- Las prácticas pedagógicas inmersas en el aprendizaje del análisis de gráficas son desarrolladas desde la perspectiva tradicional por parte de los docentes, aun cuando utilizan medios como internet y otras herramientas digitales. Esto obedece a que la interacción entre el conocimiento y el estudiante es nula, se considera que es de tipo magistral-digital.

- Las concepciones provenientes de los docentes sobre el análisis de gráficas determinan que ésta es una temática muy fácil de enseñar. En este sentido, se aprecia una visión opuesta a la de la mayoría de los estudiantes, los cuales sienten que la temática es complicada.

- Los estudiantes consideran que los ejemplos dados en clase son alejados de su realidad inmediata, de manera que se tratan asignaturas ajenas a su contexto actual.

- La propuesta de la unidad didáctica es una respuesta que pretende la contextualización de la realidad inmediata de los estudiantes, apoya la motivación necesaria para la familiaridad y promueve el gusto de los estudiantes por las temáticas circundantes al pensamiento matemático que, en este caso, es el pensamiento aleatorio.

REFERENCIAS

Azcárate Giménez , C., & Deulofeu Piquet, J. (1990). *Funciones y Graficas.* Madrid: Sintesis.

Bardin, L. (1991). *Análisis de contenido.* Ediciones Akal (Vol. 89).

Bowen, G., Roth, W., & MacGinn, M. (1999). *Lecturing Graphing: what features of lectures contribute to student difficulties in learning to interpret graphs?* Research in Science Education.

Campanario, J., & Otero, J. (2001). Errores y distorsiones en las representaciones gráficas que aparecen en la prensa. *Enseñanza de las Ciencias*, número extra VI congreso, 139.

Cox. (1999). *Anlytical Reasoning with multiple external representations. PhD thesis.* Department of Artificial Intelligence, University of Edimburg.

De Guzmán, M. (1984). El papel de la matemática en el proceso educativo inicial. *Enseñanza de la las ciencias*, 91 – 95.

De Zubiría Samper, J. (2006). *Los modelos pedagógicos: hacia una pedagogía dialogante.* . COOP. EDITORIAL MAGISTERIO.

MEN. (1998). *Serie Lineamientos Curriculares Indicadores de logros curriculares en matemáticas.* Bogotá: Magisterio .

MEN. (2001). *Ministerio de Educacion Nacional.* Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-339975_matematicas.pdf

Noguero, F. L. (2009). El análisis de contenido como metodo de investigación. *Revista de Educación, Universidad de Huelva* , 280.

Sandoval, C. (2002). Investigación Cualitativa . *Programa de Especializacion en teoria, metodos y tecnicas de investigación social*, 333.

Universidad
del Tolima


Pensamiento Lógico
Epistemología
Indagación en el Aula
Currículo
Número
Historia
Software Libre
Trabajo Experimental
Inteligencia Múltiple
Pensamiento Aleatorio
Diversidad
Etnomatemática
Sistema Algebraico
Pensamiento Métrico
Didáctica
Práctica Docente
Estándares Básicos
Experiencia Significativa
Recurso
Enseñanza
Investigación
Pedagogía
Contexto escolar
Representaciones
Competencias
Situación
Cultura
Educación Matemática
Pensamiento espacial
Universidad
Lógica Matemática
Psicología
Pensamiento Variacional
Escuela
Juego Matemático
Estímulo
Aprendizaje
TIC
Pensamiento Geométrico